

# Myon-Einfang durch den $^3\text{He}$ -Kern

Vom Fachbereich Physik  
der Universität Hannover

zur Erlangung des Grades  
Doktor der Naturwissenschaften  
Dr. rer. nat.

genehmigte Dissertation

von

Dipl.-Phys. Malte Oelsner  
geboren am 02.09.1967 in Salzgitter

(1999)

Referent: Prof. Dr. P. U. Sauer  
Korreferent: Prof. Dr. D. Zawischa  
Tag der Promotion: 6. 7. 1999

## Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wird eine theoretische Beschreibung der “elastischen” Myon-Einfang Reaktion am  ${}^3\text{He}$ -Kern,  $\mu^- + {}^3\text{He} \longrightarrow \nu_\mu + {}^3\text{H}$ , vorgestellt. Die Zerfallsrate dieser schwachen Reaktion ist bestimmt durch die vier Formfaktoren des schwachen nuklearen Stroms  ${}^3\text{He} \longrightarrow {}^3\text{H}$ , welche mikroskopisch zu berechnen sind. In dem in dieser Arbeit verwendeten Modell wird der Kern als ein System von Nukleonen angesehen, welche im Rahmen nicht-relativistischer Quantenmechanik über Zweikörper-Kräfte wechselwirken. In einem hierzu erweiterten Modell wird das  $\Delta$ -Isobar als expliziter Freiheitsgrad mitberücksichtigt, wodurch eine effektive Dreikörper-Kraft erzeugt wird. Die Kerne  ${}^3\text{He}$  und  ${}^3\text{H}$  werden durch Dreiteilchen-Wellenfunktionen beschrieben, die durch Lösen der Faddeev-Gleichungen bestimmt worden sind. In den expliziten Rechnungen werden Wellenfunktionen für das Paris-Potential, das Bonn OBEPQ-Potential sowie für die dazu erweiterten Kraftmodelle A2 und C2 verwendet. Der schwache nukleare Strom  ${}^3\text{He} \longrightarrow {}^3\text{H}$  ist als Matrixelement eines schwachen Stromoperator zwischen diesen Wellenfunktionen zu berechnen. Dieser Stromoperator enthält neben Einnukleonen-Anteilen auch Zweinukleonen-Anteile und  $\Delta$ -Isobar-Anteile.

Die Resultate zeigen, daß durch die Mitberücksichtigung von Zweinukleonen- und  $\Delta$ -Isobar-Korrekturen die Diskrepanz zwischen Theorie und Experiment zwar verringert werden kann, daß aber die vollen Rechnungen mit den Kraftmodellen A2 und C2 die experimentelle Zerfallsrate trotzdem noch um 6.5 % unterschätzen.

Der Vektoranteil des schwachen Stroms wird in dieser Arbeit auch zur Beschreibung der elastischen Elektronenstreureaktionen  $e^- + {}^3\text{He} ({}^3\text{H}) \longrightarrow e^- + {}^3\text{He} ({}^3\text{H})$  verwendet. Beim für Myon-Einfang relevanten Impulsübertrag wird gute Übereinstimmung mit dem Experiment gefunden. Dies legt den Schluß nahe, daß die Probleme in der Beschreibung des Myon-Einfangs vom Axialanteil des schwachen Stroms herrühren.

Der Formalismus zur Berechnung des Strommatrixelements wird so entwickelt, daß er sich direkt auf die zukünftige Beschreibung elektroschwacher Aufbruchreaktionen am gebundenen Dreinukleonen-System anwenden läßt.

Stichworte: Dreinukleonen-System, Myon-Einfang, Mesonaustauschströme



## Summary

A theoretical description of “elastic” muon capture on  ${}^3\text{He}$ ,  $\mu^- + {}^3\text{He} \longrightarrow \nu_\mu + {}^3\text{H}$ , is presented. The decay rate of this weak reaction is determined by the four form factors of the weak nuclear current  ${}^3\text{He} \longrightarrow {}^3\text{H}$ , which have to be calculated microscopically. In the model used the nucleus is regarded as a system of nucleons, which interact in the framework of non-relativistic quantum mechanics via two-body forces. In an extended model the  $\Delta$ -isobar is treated as an explicit degree of freedom generating an effective three-body force. The nuclei  ${}^3\text{He}$  and  ${}^3\text{H}$  are described by three-body wave functions, which are solutions of the Faddeev equations. In the explicit calculations wave functions corresponding to the Paris potential, the Bonn OBEPQ potential and the extended force models A2 and C2 are used. The weak nuclear current has to be calculated as a matrix element of a weak current operator between these wave functions. Besides one-nucleon contributions also two-nucleon and  $\Delta$ -isobar contributions are contained in the weak current operator.

The results show that the inclusion of two-nucleon currents and  $\Delta$ -isobar currents reduces the discrepancy between theory and experiment. However, the full theoretical results of the force models A2 and C2 still underestimate the experimental decay rate by 6.5 %.

The vector part of the weak current is used also to describe elastic electron scattering on  ${}^3\text{He}$  and  ${}^3\text{H}$ . At the momentum transfer relevant for muon capture good agreement between theory and experiment is found. This gives rise to the conclusion, that the problems in describing muon capture come from the axial part of the weak current.

The formalism of calculating the current matrix elements is developed in such a way that it can be applied directly to describe electroweak breakup reactions on the three-nucleon bound state.

Keywords: Three-nucleon system, muon capture, meson exchange currents



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Zerfallsrate und schwacher nuklearer Strom</b>	<b>5</b>
<b>3</b>	<b>Modell für den schwachen nuklearen Strom</b>	<b>9</b>
3.1	Modell der starken Wechselwirkung, Wellenfunktionen . . . . .	9
3.2	Modell der schwachen Wechselwirkung, Stromoperatoren . . . . .	14
3.2.1	Vektorielle Stromoperatoren . . . . .	14
3.2.2	Axiale Stromoperatoren . . . . .	21
<b>4</b>	<b>Berechnung des schwachen nuklearen Stroms</b>	<b>25</b>
4.1	Multipolentwicklung . . . . .	26
4.2	Zusammenhang zwischen Formfaktoren und Multipolmatrixelementen . . . . .	29
4.3	Berechnung der Multipolmatrixelemente . . . . .	31
4.3.1	Vorbereitende Bemerkungen . . . . .	31
4.3.2	Tensorzerlegung von Ein- und Zweikörper-Strömen . . . . .	33
4.3.3	Master-Formeln für die reduzierten Multipolmatrixelemente (RME) von Ein- und Zweikörper-Strömen . . . . .	37
<b>5</b>	<b>Exkurs: Elastische Elektronenstreuung</b>	<b>41</b>
5.1	Streuquerschnitt und elektromagnetischer nuklearer Strom . . . . .	42
5.2	Elektromagnetische Formfaktoren . . . . .	45
<b>6</b>	<b>Resultate für Myon-Einfang</b>	<b>61</b>
6.1	Vektorielle Formfaktoren . . . . .	61
6.2	Axiale Formfaktoren . . . . .	63
6.3	Effektive Kopplungen und Zerfallsrate . . . . .	68
6.4	Extraktion von $f_P$ . . . . .	74
<b>7</b>	<b>Zusammenfassung</b>	<b>77</b>

<b>A</b>	<b>Tensoroperatorformalismus</b>	<b>79</b>
A.1	Irreduzibler Tensoroperator und Tensorprodukt . . . . .	79
A.2	Eigenschaften von Wigner-Symbolen . . . . .	81
A.3	Umkopplungsformeln . . . . .	81
A.4	Eigenschaften von Kugelfunktionen . . . . .	82
A.5	Formeln für die Herleitung in Anhang D . . . . .	84
<b>B</b>	<b>Umformungen mit <math>\gamma</math>-Matrizen</b>	<b>87</b>
<b>C</b>	<b>Elektroschwache Stromoperatoren</b>	<b>89</b>
C.1	Elektromagnetische Stromoperatoren . . . . .	90
C.1.1	Einnukleonen-Ströme . . . . .	90
C.1.2	Zweinnukleonen-Ströme . . . . .	91
C.1.3	$\Delta$ -Isobar-Ströme . . . . .	93
C.2	Axiale Stromoperatoren . . . . .	97
C.2.1	Einnukleonen-Ströme . . . . .	97
C.2.2	Zweinnukleonen-Ströme . . . . .	98
C.2.3	$\Delta$ -Isobar-Ströme . . . . .	101
C.3	Praktische Form der Operatoren . . . . .	102
<b>D</b>	<b>Herleitung der Master-Formeln für die RME</b>	<b>105</b>
D.1	Master-Formel für den verallgemeinerten Operator . . . . .	108
D.2	Master-Formel für Einkörper-Ströme . . . . .	113
D.3	Master-Formel für Zweikörper-Ströme . . . . .	118
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>121</b>
	<b>Danksagung</b>	<b>125</b>
	<b>Selbständigkeitserklärung</b>	<b>126</b>
	<b>Curriculum Vitae</b>	<b>127</b>



# Kapitel 1

## Einleitung

Im Gegensatz zur elektromagnetischen Struktur ist die schwache Struktur des Dreinukleonen-Systems verhältnismäßig unerforscht. Während mit der Elektronenstreuung ein mächtiges Werkzeug zur Untersuchung elektromagnetischer Eigenschaften existiert, ist die Durchführung entsprechender schwacher Streuexperimente aufgrund von niedrigen Wirkungsquerschnitten extrem schwierig. Daher sind Zerfallsprozesse die wichtigste Quelle, um Informationen über schwache Eigenschaften zu gewinnen. Der  $\beta$ -Zerfall des Tritium-Kerns ( ${}^3\text{H}$ ) liefert beispielsweise den axialen Formfaktor  $F_A$  des gebundenen Dreinukleonen-Systems bei verschwindendem Impulsübertrag. Die Untersuchung von Myon-Einfang durch den  ${}^3\text{He}$ -Kern ermöglicht es, die Information über die schwache Struktur des Dreinukleonen-Systems auf endliche Impulsüberträge auszudehnen.

Beim Myon-Einfang wird ein Myon ( $\mu$ ) aus einem atomaren Niveau heraus vom Kern eingefangen. Unter dem Einfluß der schwachen Wechselwirkung zerfällt dieses myonische Atom in ein myonisches Neutrino ( $\nu_\mu$ ) und einen hadronischen Endzustand. Beim Einfang durch den  ${}^3\text{He}$ -Kern sind aus energetischen Gründen die folgenden drei Reaktionen möglich,

$$\mu + {}^3\text{He} \longrightarrow \nu_\mu + {}^3\text{H}, \quad (1.1)$$

$$\longrightarrow \nu_\mu + d + n, \quad (1.2)$$

$$\longrightarrow \nu_\mu + p + n + n. \quad (1.3)$$

In der “elastische” Reaktion (1.1) wandelt sich der  ${}^3\text{He}$ -Kern in einen Tritium-Kern um, während er in der Zweikörper-Aufbruchreaktion (1.2) in ein Deuteron ( $d$ ) und ein Neutron ( $n$ ) und in der Dreikörper-Aufbruchreaktion (1.3) in ein Proton ( $p$ ) und zwei Neutronen zerfällt. Ziel dieser Arbeit ist die theoretische Beschreibung der “elastischen” Myon-Einfang-Reaktion (1.1), deren Zerfallsrate kürzlich in einem Experiment am PSI mit hoher Präzision bestimmt wurde [1]. Diese Reaktion nimmt im Hinblick auf theoretische und experimentelle Genauigkeit eine herausragende Stellung ein, da der  ${}^3\text{He}$ -Kern der einzige Kern ist, der die beiden Kriterien  $A \leq 3$  und  $Z \geq 2$  erfüllt. Das erste Kriterium, Massenzahl  $A \leq 3$ , ist aus theoretischer Sicht wichtig, denn nur das

Zweinukleonen-System und das Dreinukleonen-System sind die Systeme, die im Rahmen nicht-relativistischer Quantenmechanik mit hoher Genauigkeit beschrieben werden können. Diese Genauigkeit kann für Kerne mit  $A \geq 4$  bislang noch nicht erreicht werden. Erschwerend kommt hinzu, daß beim Myon-Einfang durch den nächstgrößeren Kern, den  $^4\text{He}$ -Kern, im Endzustand nur Aufbruchkanäle auftreten. Das zweite Kriterium, Kernladungszahl  $Z \geq 2$ , ist aus experimenteller Sicht wichtig, da zum Erreichen hoher experimenteller Genauigkeit ein geladenes Teilchen im Endzustand vorliegen sollte. Dies ist z.B. beim Myon-Einfang am Deuteron nicht der Fall, weswegen der experimentelle Fehlerbalken für die Zerfallsrate der Reaktion  $\mu + d \rightarrow \nu_\mu + n + n$  mit 6% [9] um ein Vielfaches größer ist als der entsprechende Fehlerbalken in der Reaktion  $\mu^- + ^3\text{He} \rightarrow \nu_\mu + ^3\text{H}$ , der beim bereits erwähnten PSI Experiment auf 0.3% reduziert werden konnte. Diese hohe experimentelle Genauigkeit erlaubt es, die theoretischen Vorhersagen und damit die verwendeten Modelle einem präzisen Test zu unterwerfen.

Da der leptonische Strom ( $\mu \rightarrow \nu_\mu$ ) aus dem Standardmodell wohlbekannt ist, ist der schwache nukleare Strom ( $^3\text{He} \rightarrow ^3\text{H}$ ) die einzige unbekannte Größe in der “elastischen” Myon-Einfang-Reaktion. Um eine Vorhersage für die Zerfallsrate machen zu können, muß dieser Strom im Rahmen eines mikroskopischen Modells berechnet werden. In dem von uns verwendeten Modell betrachten wir den Kern als ein System von Nukleonen, die über realistische Zweikörper-Kräfte miteinander wechselwirken. In einem erweiterten Kraftmodell führen wir mit Hilfe von Übergangspotentialen das  $\Delta$ -Isobar als expliziten Freiheitsgrad in die Beschreibung ein. Hierdurch wird eine effektive Dreinukleonen-Kraft erzeugt. Der  $^3\text{He}$ -Kern und der  $^3\text{H}$ -Kern werden durch Dreiteilchen-Wellenfunktionen beschrieben, die durch Lösen der Faddeev-Gleichungen in früheren Arbeiten [20, 43] erhalten worden sind und in dieser Arbeit übernommen werden. Der schwache nukleare Strom ist als Matricelement eines schwachen Stromoperators zwischen diesen Wellenfunktionen zu berechnen. Der von uns verwendete Stromoperator enthält neben Einnukleonen-Anteilen auch Zweinukleonen-Anteile und Anteile mit  $\Delta$ -Isobar-Anregung. Er ist bereits in einer früheren Arbeit zur Berechnung des  $\beta$ -Zerfalls von  $^3\text{H}$  benutzt worden [5].

Es ist bekannt, daß die nur Einnukleonen-Anteile berücksichtigende Impulsapproximation (IA) die experimentelle Zerfallsrate beim “elastischen” Myon-Einfang unterschätzt [38, 13]. Daher ist eine der wesentlichen physikalischen Fragestellungen dieser Arbeit, inwieweit die zusätzlichen schwachen Reaktionsmechanismen von Zweinukleonen- und  $\Delta$ -Isobar-Natur zu einer besseren Übereinstimmung von Theorie und Experiment führen. Darüberhinaus soll die Rechnung für verschiedene realistische Kraftmodelle durchgeführt werden, um zu untersuchen, wie groß die Modellabhängigkeit der Resultate und damit die theoretische Unsicherheit ist. Diese Frage erhält eine besondere Bedeutung unter dem Aspekt, daß aufgrund von experimentellen Schwierigkeiten beim Myon-Einfang durch das Proton der induzierte pseudoskalare Formfaktor  $f_p$  des Nukleons bislang nur mit einem Fehlerbalken von 22% bestimmt werden konnte [8]. Dies hat zu Speku-

lationen geführt, ob diese nukleonische Größe nicht möglicherweise viel genauer aus der experimentell sehr viel besser vermessenen Reaktion  $\mu^- + {}^3\text{He} \rightarrow \nu_\mu + {}^3\text{H}$  extrahiert werden kann. Dies setzt allerdings eine hohe theoretische Genauigkeit voraus.

Einen der wesentliche Schwerpunkte dieser Arbeit bildet die Technik zur Berechnung des Strommatrixelements. Der Stromoperator kann dabei sowohl der schwache Stromoperator als auch der elektromagnetische (e.m.) Stromoperator sein. Der entwickelte Formalismus kann daher neben der Beschreibung schwacher Reaktionen auch zur Beschreibung e.m. Reaktionen dienen. Die Berechnung erfolgt so, daß zuerst das Matrixelement des Stromoperators zwischen einem beliebigen Partialwellen-Basiszustand und dem Dreiteilchen-Bindungszustand berechnet wird. Das auf diese allgemeine Weise berechnete Matrixelement kann damit auch benutzt werden, wenn im Endzustand statt des Bindungszustands ein Streuzustand vorliegt. Diese Arbeit legt daher einen wichtigen Grundstein zur zukünftigen Beschreibung elektroschwacher Aufbruchreaktionen wie z.B. der Photospaltung  $\gamma + {}^3\text{He} \rightarrow d + p$  oder der Myon-Einfang-Reaktionen (1.2) und (1.3).

Neben der “elastischen” Myon-Einfang Reaktion werden in dieser Arbeit auch die elastischen Elektronenstreureaktionen

$$e + {}^3\text{He} \rightarrow e + {}^3\text{He}, \quad (1.4)$$

$$e + {}^3\text{H} \rightarrow e + {}^3\text{H}, \quad (1.5)$$

untersucht. Durch Vergleich mit den Resultaten älterer Arbeiten aus der Kerntheoriegruppe Hannover [45, 22, 40] kann geprüft werden, ob der entwickelte Formalismus und die Berechnung des Strommatrixelements technisch korrekt sind. Desweiteren werden durch Hinzunahme zusätzlicher Stromoperatoren wie z.B. des  $\rho\pi\gamma$ -Stroms und durch die Verwendung von Wellenfunktionen von aktuelleren Kraftmodellen wie dem Bonn OBEPQ Potential und dem dazu erweiterten C2 Potential diese älteren Rechnungen erweitert und aktualisiert. Diese Neuberechnung ist motiviert durch das kürzlich wieder aufkeimende theoretische und experimentelle Interesse an diesen e.m. Reaktionen [37, 30]. Der in diesen Reaktionen auftretende Isektoranteil des e.m. Stroms ist aufgrund der *Conserved Vector Current* (CVC) Relation eng verknüpft mit dem Vektoranteil des beim Myon-Einfang auftretenden schwachen Stroms. Daher steht die elastische Elektronenstreuung am gebundenen Dreinukleonen-System im engen Zusammenhang mit der “elastischen” Myon-Einfang Reaktion und bietet die Möglichkeit, den Vektoranteil des schwachen Stroms separat zu testen.

Die vorliegende Arbeit ist folgendermaßen gegliedert: In Kapitel 2 wird die Formel für die Zerfallsrate der “elastischen” Myon-Einfang-Reaktion hergeleitet, die die Formfaktoren des schwachen nuklearen Stroms als einzige unbekannte Größen enthält. Diese Formfaktoren sind im Rahmen unseres theoretischen Modells zu berechnen, welches wir in Kapitel 3 vorstellen. Im ersten Abschnitt

dieses Kapitels beschreiben wir das Modell der starken Wechselwirkung, welches die Grundlage zur Berechnung der Dreiteilchen-Wellenfunktionen bildet. Im zweiten Abschnitt stellen wir dann das Modell für den schwachen Stromoperator vor. Im zentralen Kapitel 4 beschreiben wir ausführlich die Technik zur Berechnung des Strommatrixelements und der Formfaktoren. In den folgenden beiden Kapiteln präsentieren wir anschließend die in dieser Arbeit erzielten numerischen Resultate. Die Ergebnisse für die elastische Elektronenstreuung sind in Kapitel 5 angegeben, die Ergebnisse für die “elastische” Myon-Einfang-Reaktion werden in Kapitel 6 diskutiert. In Kapitel 7 wird schließlich das in dieser Arbeit Erreichte zusammengefaßt.

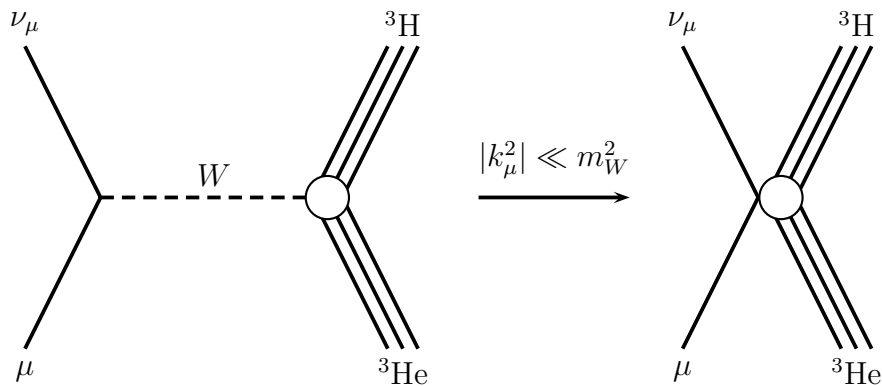
# Kapitel 2

## Zerfallsrate und schwacher nuklearer Strom

Der sich aus Energie- und Impulserhaltung ergebende Viererimpulsübertrag der Reaktion  $\mu^- + {}^3\text{He} \longrightarrow \nu_\mu + {}^3\text{H}$  beträgt  $k_\mu^2 = -0.954m_\mu^2 = -(103.2 \text{ MeV})^2$  und ist verglichen mit der Masse des ausgetauschten  $W$ -Bosons ( $\approx 80 \text{ GeV}$ ) sehr klein. Somit handelt es sich bei dieser Reaktion um einen Niederenergieprozeß, der mit der effektiven Lagrangedichte

$$\mathcal{L}(x) = (-)\frac{G_F}{\sqrt{2}}j_\mu(x)J^\mu(x), \quad (2.1)$$

beschrieben wird. Hierbei sind  $j^\mu(x)$  und  $J^\mu(x)$  die Operatoren des schwachen leptonischen und schwachen hadronischen Stroms und  $G_F$  die Fermi-Kopplungskonstante. Die Strom-Strom-Kopplung bringt die Punktförmigkeit der schwachen Wechselwirkung im Niederenergiebereich zum Ausdruck.



**Abbildung 2.1:** Diagrammatische Darstellung der “elastischen” Myon-Einfang-Reaktion durch den  ${}^3\text{He}$ -Kern. Die schwache Wechselwirkung, die durch das Vektorboson  $W$  vermittelt wird, ist im Niederenergiebereich punktförmig und wird durch eine Strom-Strom-Kopplung beschrieben.

Die Einfangreaktion kann daher nur stattfinden, wenn sich das Myon und der  ${}^3\text{He}$ -Kern am gleichen Ort befinden. Aus diesem Grund nehmen wir an, daß die Einfangreaktion ausschließlich im atomaren  $1s$ -Zustand erfolgt, da nur in diesem Zustand der räumliche Überlapp von Myon und  ${}^3\text{He}$ -Kern hinreichend groß ist. Im  $1s$ -Zustand verschwindet der Bahndrehimpuls der Relativbewegung und Myonspin und Kernspin koppeln zum atomaren Gesamtdrehimpuls  $J, M_J$ . Der Anfangszustand hat daher die Gestalt,

$$|i\rangle = |\vec{p}_{At} JM_J\rangle = \sum_{s_\mu, s_{3\text{He}}} \left\langle \frac{1}{2} s_\mu \frac{1}{2} s_{3\text{He}} | JM_J \right\rangle \int d^3p \phi_{1s}(\vec{p}) |\vec{\mu} s_\mu\rangle |\vec{p}_{3\text{He}} \Psi_{3\text{He}} s_{3\text{He}}\rangle \left| \begin{array}{l} \vec{\mu} = \frac{m_\mu}{m_\mu + m_{3\text{He}}} \vec{p}_{At} + \vec{p} \\ \vec{p}_{3\text{He}} = \frac{m_{3\text{He}}}{m_\mu + m_{3\text{He}}} \vec{p}_{At} - \vec{p} \end{array} \right. , \quad (2.2)$$

wobei  $\phi_{1s}(\vec{p})$  die nicht-relativistische Wellenfunktion des Myon-Atoms im Impulsraum ist, die vom Relativimpuls  $\vec{p}$  zwischen Myon und  ${}^3\text{He}$ -Kern abhängt. Der Endzustand lautet,

$$|f\rangle = |\vec{\nu} s_\nu\rangle |\vec{p}_{3\text{H}} \Psi_{3\text{H}} s_{3\text{H}}\rangle. \quad (2.3)$$

Die auftretenden Impulseigenzustände sind nicht-kovariant normiert,

$$\langle \vec{p}_x | \vec{p}_x' \rangle = \delta(\vec{p}_x - \vec{p}_x'). \quad (2.4)$$

Die Symbole  $\Psi_{3\text{He}}$  und  $\Psi_{3\text{H}}$  in den nuklearen Zuständen weisen darauf hin, daß die Kerne im Unterschied zu den Leptonen eine innere Struktur besitzen. Für die differentielle Zerfallsrate des Myon-Atoms, welches sich mit den Wahrscheinlichkeiten  $P(J, M_J)$  in den Hyperfein-Niveaus  $J, M_J$  befindet, ergibt sich aus (2.1), (2.2) und (2.3) die folgende Formel,

$$\frac{d\Gamma(\cos\theta)}{d\cos\theta} = (2\pi)^8 p_{3\text{H}}^2 \sum_{JM_J} P(J, M_J) |\langle f|T|i\rangle|^2, \quad (2.5)$$

mit dem T-Matrix-Element

$$\begin{aligned} \langle f|T|i\rangle &= (-) \frac{G_F}{\sqrt{2}} \psi_{1s}(\vec{r}=0) (2\pi)^{\frac{3}{2}} \sum_{s_\mu s_{3\text{He}}} \left\langle \frac{1}{2} s_\mu \frac{1}{2} s_{3\text{He}} | JM_J \right\rangle \\ &\quad \langle \vec{\nu} s_\nu | j_\mu(x=0) | \vec{\mu} s_\mu \rangle \langle \vec{p}_{3\text{H}} \Psi_{3\text{H}} s_{3\text{H}} | J^\mu(x=0) | \vec{p}_{3\text{He}} \Psi_{3\text{He}} s_{3\text{He}} \rangle \left| \begin{array}{l} \vec{\nu} = -\vec{p}_{3\text{H}} \\ \vec{\mu} = \vec{p}_{3\text{He}} = 0 \end{array} \right. . \end{aligned} \quad (2.6)$$

Diese Formel gilt im Laborsystem, dem Ruhesystem des zerfallenden Myon-Atoms.

In diesem System ist der Impuls des  ${}^3\text{H}$ -Kerns durch  $\vec{p}_{\text{H}} = p_{\text{H}}(\cos \theta, 0, \sin \theta)$  gegeben und hat den Betrag  $p_{\text{H}} = 103.2 \text{ MeV}$ . Als  $z$ -Achse wurde die Polarisationsachse des Myon-Atoms gewählt.  $\psi_{1s}(\vec{r})$  ist die atomare Wellenfunktion im Ortsraum, die mit der Impulsraumwellenfunktion verknüpft ist durch

$$\psi_{1s}(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int d^3p \phi_{1s}(\vec{p}) e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}}. \quad (2.7)$$

Sie hat die explizite Gestalt

$$\psi_{1s}(\vec{r}) = \frac{1}{(\pi)^{\frac{1}{2}}} \left( \frac{Z}{r_B} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{Z|\vec{r}|}{r_B}} \quad (2.8)$$

mit der Kernladungszahl  $Z = 2$  und dem Bohr-Radius  $r_B = 265.56 \text{ fm}$  für das Myon. Da der leptonische Strom im Rahmen des Standardmodells die wohlbekannte Struktur

$$\langle \vec{\nu}_{s\nu} | j^\mu(x=0) | \vec{\mu}_{s\mu} \rangle = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{(4E_\nu E_\mu)^{\frac{1}{2}}} \bar{u}_{s\nu}(\vec{\nu}) [\gamma^\mu (1 - \gamma_5)] u_{s\mu}(\vec{\mu}) \quad (2.9)$$

besitzt, ist der schwache nukleare Strom die einzige Größe, die zur Beschreibung der "elastischen" Myon-Einfang-Reaktion noch fehlt. Dieser Strom setzt sich wie der leptonische Strom aus einem vektoriellen und axialen Anteil zusammen und kann - unter Berücksichtigung allgemeiner Symmetrieprinzipien - auf folgende Weise parametrisiert werden,

$$\begin{aligned} & \langle \vec{p}_{\text{H}} \Psi_{\text{H}S_{\text{H}}} | J^\mu(x=0) | \vec{p}_{\text{He}} \Psi_{\text{He}S_{\text{He}}} \rangle \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{(4E_{\text{H}} E_{\text{He}})^{\frac{1}{2}}} \bar{u}_{s_{\text{H}}}(\vec{p}_{\text{H}}) [\Gamma^\mu] u_{s_{\text{He}}}(\vec{p}_{\text{He}}) \end{aligned}$$

mit dem Operator

$$\Gamma^\mu = F_V(k_\mu^2) \gamma^\mu + F_M(k_\mu^2) i \sigma^{\mu\nu} \frac{k_\nu}{2M} + F_A(k_\mu^2) \gamma^\mu \gamma_5 + F_P(k_\mu^2) \gamma_5 \frac{k^\mu}{2M}. \quad (2.10)$$

Hierbei ist davon ausgegangen worden, daß die Kerne  ${}^3\text{He}$  und  ${}^3\text{H}$  in Analogie zum Proton-Neutron-System ein Isospindublett bilden. In den auftretenden Dirac-Spinoren  $u_{s_{\text{He}}}(\vec{p}_{\text{He}})$  und  $u_{s_{\text{H}}}(\vec{p}_{\text{H}})$  wird wie im Operator  $\Gamma^\mu$  die mittlere Masse  $M = 2808.66 \text{ MeV}$  des gebundenen Dreinukleonen-Systems verwendet.  $k^\mu = p_{\text{H}}^\mu - p_{\text{He}}^\mu$  ist der Viererimpulsübertrag.

Die Formfaktoren  $F_V$  und  $F_M$  parametrisieren den vektoriellen Stromanteil, die Formfaktoren  $F_A$  und  $F_P$  den axialen Stromanteil. Diese vier Formfaktoren, die nur vom Quadrat  $k_\mu^2 = k^\mu k_\mu$  des Viererimpulsübertrages abhängen und somit Lorentz-Skalare sind, enthalten die gesamte Information über die schwache Struktur des nuklearen Systems. Sie sind im Rahmen eines mikroskopischen Modells zu berechnen, welches im nächsten Kapitel vorgestellt wird.

Zunächst jedoch bringen wir die differentielle Zerfallsrate durch Kontraktion von leptonischem und nuklearem Strom auf die Gestalt

$$\frac{d\Gamma(\cos \theta)}{d\cos \theta} = \frac{1}{2}\Gamma_0 \left[ 1 + A_v P_v \cos \theta + A_t P_t \frac{1}{2}(3 \cos^2 \theta - 1) + A_\Delta P_\Delta \right]. \quad (2.11)$$

$P_v = P(1, 1) - P(1, -1)$ ,  $P_t = P(1, 1) + P(1, -1) - 2P(1, 0)$  und  $P_\Delta = P(1, 1) + P(1, 0) + P(1, -1) - 3P(0, 0)$  sind Linearkombinationen der Besetzungswahrscheinlichkeiten  $P(J, M_J)$  der Hyperfeinniveaus  $|i(JM_J)\rangle$  des Myon-Atoms. Die unpolarisierte Zerfallsrate ist durch

$$\Gamma_0 = c \left[ G_V^2 + 2G_A^2 + (G_A - G_P)^2 \right], \quad (2.12)$$

gegeben, wobei es sich üblich ist [13], die Beiträge der Formfaktoren in den folgenden Linearkombinationen zusammenzufassen,

$$G_V = \left( 1 + \frac{p_{3H}}{E_{3H} + M} \right) F_V - \frac{p_{3H}}{2M} \left( \frac{p_{3H} + E_{3H} - M}{E_{3H} + M} \right) F_M, \quad (2.13)$$

$$G_A = F_A - \frac{p_{3H}}{E_{3H} + M} (F_V + F_M), \quad (2.14)$$

$$G_P = -\frac{p_{3H}}{E_{3H} + M} \left( F_V + F_M + F_A - \frac{m_\mu}{2M} F_P \right). \quad (2.15)$$

In Gl. (2.12) ist die Konstante  $c = 328.8 \text{ s}^{-1}$ .  $G_V$ ,  $G_A$  und  $G_P$  bezeichnet man als effektive Kopplungen. Die in Gl. (2.11) auftretenden Polarisationsobservablen  $A_v$ ,  $A_t$  und  $A_\Delta$  sind ebenfalls durch die effektive Kopplungen  $G_V$ ,  $G_A$  und  $G_P$  bestimmt,

$$A_v = \frac{c}{\Gamma_0} (G_V + G_A - G_P)^2, \quad (2.16)$$

$$A_t = -\frac{4c}{3\Gamma_0} G_P (G_V + G_A), \quad (2.17)$$

$$A_\Delta = -\frac{2c}{3\Gamma_0} [G_P (G_V + G_A) - G_A (G_V + G_P - G_A)]. \quad (2.18)$$



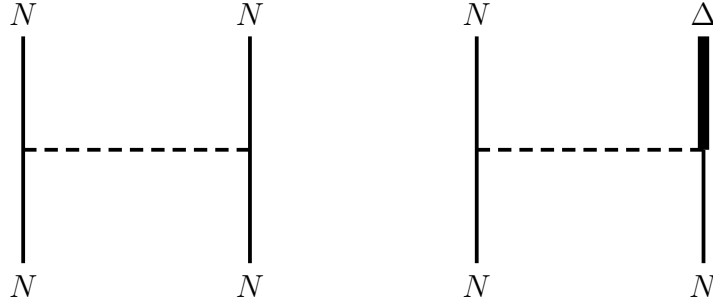
# Kapitel 3

## Modell für den schwachen nuklearen Strom

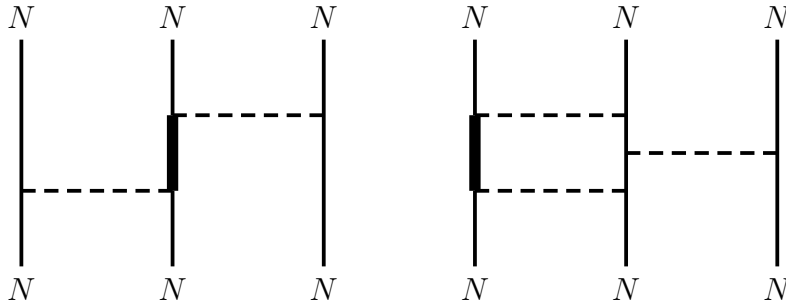
In Kapitel 2 haben wir für die Zerfallsrate der “elastischen” Myon-Einfang-Reaktion einen Ausdruck hergeleitet, der den schwachen nuklearen Strom bzw. die ihn parametrisierenden Formfaktoren als einzige unbekannte Größen enthält. Um eine Vorhersage für die Zerfallsrate machen zu können, ist dieser Strom im Rahmen eines mikroskopischen Modells zu berechnen. In dieser Arbeit wird der Kern als ein System von Nukleonen angesehen, das durch nicht-relativistische Quantenmechanik beschrieben wird. Der schwache nukleare Strom ist daher als Matrixelement eines schwachen Stromoperators  $J^\mu(x)$  zwischen Dreiteilchen-Wellenfunktionen  $|\vec{p}_{\text{He}}\Psi_{\text{He}}S_{\text{He}}\rangle$  und  $|\vec{p}_{\text{H}}\Psi_{\text{H}}S_{\text{H}}\rangle$  zu berechnen. Die in unseren Rechnungen verwendeten Wellenfunktionen und Stromoperatoren stellen wir in den folgenden beiden Abschnitten vor.

### 3.1 Modell der starken Wechselwirkung, Wellenfunktionen

Wir betrachten den Kern als ein System von Nukleonen, welche im Rahmen nicht-relativistischer Quantenmechanik über instantane Zweikörperkräfte wechselwirken. Eine Reihe quantitativ erfolgreicher, “realistischer” Kraftmodelle existiert, die Nukleon-Nukleon-Streudaten mit hoher Genauigkeit beschreiben. Eine interessante Frage ist, ob auch die Eigenschaften des Dreinukleonen-Systems erfolgreich von diesen Modellen beschrieben werden können. In dieser Arbeit verwenden wir das Paris-Potential [26] und das Bonn OBEPQ-Potential [28, 29]. Zu diesen rein-nukleonischen Kraftmodellen lassen sich die erweiterten Kraftmodelle A2 und C2 konstruieren [20, 22], in dem mit Hilfe von Übergangspotentialen das  $\Delta$ -Isobar als expliziter Freiheitsgrad in die Beschreibung miteinbezogen wird (Abb. 3.1). Im ursprünglichen, rein nukleonischen Hilbertraum wird hierdurch eine Dreikörperkraft erzeugt (Abb. 3.2).



**Abbildung 3.1:** In den zum Paris-Potential und zum Bonn OBEPQ-Potential erweiterten Kraftmodellen A2 und C2 wird das  $\Delta$ -Isobar durch den im rechten Diagramm dargestellten Anregungsprozeß zu einem expliziten Freiheitsgrad.



**Abbildung 3.2:** Beispiele von Prozessen, die in den erweiterten Kraftmodellen A2 und C2 zu einer effektiven Dreinukleonen-Kraft beitragen.

Das Dreiteilchen-System wird beschrieben durch den Hamilton-Operator

$$H = \sum_{i=1}^3 \delta m_i + \sum_{i=1}^3 \frac{\vec{p}_i^2}{2m_i} + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^3 V_{ij}, \quad (3.1)$$

der sich durch Einführen der Jacobi-Impulse

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3, \quad (3.2a)$$

$$\vec{p} = \frac{m_3 \vec{p}_2 - m_2 \vec{p}_3}{m_2 + m_3}, \quad (3.2b)$$

$$\vec{q} = \frac{m_1(\vec{p}_2 + \vec{p}_3) - (m_2 + m_3)\vec{p}_1}{m_1 + m_2 + m_3}, \quad (3.2c)$$

auf die Gestalt

$$H = \frac{\vec{P}^2}{2(m_1 + m_2 + m_3)} + h \quad (3.3)$$

bringen läßt.  $\delta m_i = m_i - m$  ist hierbei die Differenz von Teilchenmasse  $m_i$  und Nukleonenmasse  $m$ .

Da der intrinsische Hamiltonoperator

$$h = \sum_{i=1}^3 \delta m_i + \frac{\vec{p}^2}{2\mu} + \frac{\vec{q}^2}{2\tilde{\mu}} + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^3 V_{ij} \quad (3.4)$$

mit  $\mu = m_2 m_3 / (m_2 + m_3)$  und  $\tilde{\mu} = m_1 (m_2 m_3) / (m_1 + m_2 + m_3)$  unabhängig von den Operatoren der Schwerpunktsbewegung  $\vec{R}$  und  $\vec{P}$  ist, sind die Eigenzustände von  $H$  Produktzustände aus einer ebenen Welle der Schwerpunktsbewegung  $|\vec{P}\rangle$  und einem von  $\vec{P}$  unabhängigen inneren Zustand  $|\Psi\rangle$ ,

$$|\vec{P}\Psi\rangle = |\vec{P}\rangle |\Psi\rangle. \quad (3.5)$$

Die von uns verwendeten Kraftmodelle enthalten keine Coulomb-Wechselwirkung und keine Ladungsabhängigkeit. Die Kerne  ${}^3\text{He}$  und  ${}^3\text{H}$  bilden daher ein Isospindublett,

$$|\Psi_{{}^3\text{He}({}^3\text{H})}\rangle = |\Psi_B M_T = \pm \frac{1}{2}\rangle, \quad (3.6)$$

d.h. der  ${}^3\text{He}$ -Kern entspricht der Isospin-Projektion  $M_T = +\frac{1}{2}$  und der  ${}^3\text{H}$ -Kern der Isospin-Projektion  $M_T = -\frac{1}{2}$ . Vergleicht man die Massen dieser Kerne ( $m_{{}^3\text{He}} = 2808.39$  MeV,  $m_{{}^3\text{H}} = 2808.93$  MeV) [46], so sieht man, daß in diesem Fall die Isospinsymmetrie sogar noch besser realisiert ist als beim Proton ( $m_p = 938.272$  MeV) und Neutron ( $m_n = 939.566$  MeV). Der Dreinukleonen-Bindungszustand  $|\Psi_B\rangle$  ist durch Lösen der Schrödinger-Gleichung

$$h|\Psi_B\rangle = E_B|\Psi_B\rangle \quad (3.7)$$

bzw. der hierzu äquivalenten Faddeev-Gleichungen [15] zu bestimmen. Die Faddeev-Gleichungen, die für eine numerische Behandlung besser geeignet sind, sind von A. Stadler im Impulsraum numerisch gelöst worden [43]. Für die in dieser Arbeit benutzten Kraftmodelle ergaben sich dabei die in Tabelle 3.1 aufgelisteten Bindungsenergien.

	Paris	A2	OBEPQ	C2	Exp.
$E_B$ [MeV]	-7.38	-7.72	-8.29	-8.39	-8.48

**Tabelle 3.1:** Bindungsenergien  $E_B$  des Dreinukleonen-Grundzustands für das Paris-Potential, das Bonn OBEPQ-Potential und die erweiterten Kraftmodelle A2 und C2 sowie der experimentelle Wert für  ${}^3\text{H}$ .

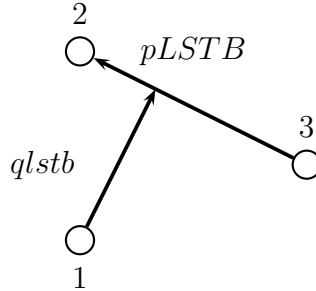
Die von A. Stadler berechneten Wellenfunktionen  $|\Psi_B\rangle$  übernehmen wir in dieser Arbeit. Diese Wellenfunktionen sind dargestellt in der folgenden Partialwellen-Basis

$$|pq\nu\rangle = |pq[(Ll)\mathcal{L}(Ss)\mathcal{S}]JM_J;(Tt)\mathcal{T}M_T;Bb\rangle, \quad (3.8)$$

d.h. sie liegen in der Form

$$|\Psi_B\rangle = \sum_{\nu} \int_0^{\infty} p^2 dp \int_0^{\infty} q^2 dq |pq\nu\rangle \langle pq\nu|\Psi_B\rangle \quad (3.9)$$

vor. Die Jacobi-Impulse  $p$  und  $q$  sowie alle diskreten Quantenzahlen sind in Abbildung 3.3 graphisch dargestellt. Die Wellenfunktionen für die rein-nukleonischen Kraftmodelle Paris und Bonn OBEPQ liegen in 22 Kanälen vor, wobei in der Zweikörper-Wechselwirkung Partialwellen bis zum Gesamtdrehimpuls  $I = 2$  berücksichtigt wurden. Bezüglich der Dreiteilchen-Quantenzahlen erfolgte die zusätzliche Beschränkung  $L + l \leq 8$  und die Vernachlässigung von  $P$ -Wellen, d.h. von Kanälen mit  $\mathcal{L} = 1$ . Die entsprechenden Wellenfunktionen für die erweiterten Kraftmodelle liegen in 48 Kanälen vor, wobei aus physikalischen Gründen nur Kanäle mit maximal einem  $\Delta$ -Isobar berücksichtigt worden sind. Um den Baryoneninhalt zu charakterisieren, sind die zusätzlichen Quantenzahlen  $B$  und  $b$  eingeführt worden.  $B = 1$  entspricht einer  $NN$ -Konfiguration im Paar,  $B = 0$  entspricht einer  $N\Delta$ -Konfiguration. Wenn Teilchen 1 ein Nukleon ist, so wird es mit  $b = \frac{1}{2}$  beschrieben, wenn es ein  $\Delta$ -Isobar ist, so ist  $b = -\frac{1}{2}$ . Da der Hilbertraum auf Konfigurationen mit maximal einem  $\Delta$ -Isobar beschränkt ist, reichen diese Vereinbarungen zur vollständigen Festlegung eines Zustandes aus. In Tabelle 3.2 sind die Quantenzahlen der Wellenfunktionskanäle sowie ihre Wahrscheinlichkeiten  $P_{\nu}$  in der berechneten Wellenfunktion angegeben.



**Abbildung 3.3:** Jacobi-Impulse des Dreiteilchen-Systems und die diskreten Quantenzahlen des Bahndrehimpulses  $L$  ( $l$ ), des Spins  $S$  ( $s$ ), des Isospins  $T$  ( $t$ ) und des Baryoneninhalts  $B$  ( $b$ ). Großbuchstaben beziehen sich auf das Paar 23, Kleinbuchstaben auf das Teilchen 1.

**Tabelle 3.2:** Liste der Wellenfunktionskanäle. Die Kanäle 1-22 sind rein-nukleonisch. In den Kanälen 23-34 tritt das  $\Delta$ -Isobar im Paar 23, in den Kanälen 35-48 als Teilchen 1 auf. Die gesamte  $\Delta$ -Isobar-Wahrscheinlichkeit in den Wellenfunktionen der erweiterten Kraftmodelle A2 und C2 beträgt etwa 2 %.

Kanal	Quantenzahlen										Wahrscheinlichkeiten $P_\nu$ [%]			
$\nu$	$B$	$b$	$L$	$l$	$\mathcal{L}$	$S$	$s$	$\mathcal{S}$	$T$	$t$	Paris	OBEPQ	A2	C2
1	1	1/2	0	0	0	0	1/2	1/2	1	1/2	44.60	45.97	43.55	44.72
2	1	1/2	0	0	0	1	1/2	1/2	0	1/2	45.06	46.25	43.96	44.98
3	1	1/2	1	1	0	1	1/2	1/2	1	1/2	0.33	0.30	0.30	0.30
4	1	1/2	1	1	0	0	1/2	1/2	0	1/2	0.33	0.30	0.30	0.30
5	1	1/2	2	2	0	1	1/2	1/2	0	1/2	0.39	0.33	0.39	0.32
6	1	1/2	2	2	0	0	1/2	1/2	1	1/2	0.77	0.59	0.73	0.57
7	1	1/2	3	3	0	0	1/2	1/2	0	1/2	0.02	0.01	0.02	0.01
8	1	1/2	3	3	0	1	1/2	1/2	1	1/2	0.02	0.02	0.02	0.02
9	1	1/2	4	4	0	1	1/2	1/2	0	1/2	0.07	0.05	0.07	0.05
10	1	1/2	4	4	0	0	1/2	1/2	1	1/2	0.13	0.07	0.13	0.06
11	1	1/2	1	1	2	1	1/2	3/2	1	1/2	2.45	2.13	2.60	2.27
12	1	1/2	2	0	2	1	1/2	3/2	0	1/2	2.83	1.99	2.90	2.06
13	1	1/2	0	2	2	1	1/2	3/2	0	1/2	0.98	0.87	1.05	0.94
14	1	1/2	2	2	2	1	1/2	3/2	0	1/2	0.17	0.12	0.17	0.12
15	1	1/2	3	1	2	1	1/2	3/2	1	1/2	0.30	0.14	0.30	0.13
16	1	1/2	1	3	2	1	1/2	3/2	1	1/2	1.01	0.62	1.03	0.63
17	1	1/2	3	3	2	1	1/2	3/2	1	1/2	0.11	0.06	0.10	0.06
18	1	1/2	4	2	2	1	1/2	3/2	0	1/2	0.05	0.02	0.05	0.02
19	1	1/2	2	4	2	1	1/2	3/2	0	1/2	0.12	0.06	0.12	0.06
20	1	1/2	4	4	2	1	1/2	3/2	0	1/2	0.02	0.01	0.01	0.01
21	1	1/2	5	3	2	1	1/2	3/2	1	1/2	0.07	0.03	0.07	0.02
22	1	1/2	3	5	2	1	1/2	3/2	1	1/2	0.17	0.07	0.16	0.07
23	0	1/2	1	1	2	1	1/2	3/2	1	1/2			0.08	0.10
24	0	1/2	1	1	2	2	1/2	5/2	1	1/2			0.10	0.11
25	0	1/2	2	0	2	1	1/2	3/2	1	1/2			0.02	0.03
26	0	1/2	2	0	2	2	1/2	3/2	1	1/2			0.32	0.37
27	0	1/2	2	0	2	2	1/2	5/2	1	1/2			0.46	0.53
28	0	1/2	0	2	2	1	1/2	3/2	1	1/2			0.07	0.08
29	0	1/2	0	2	2	2	1/2	5/2	1	1/2			0.14	0.17
30	0	1/2	2	2	2	1	1/2	3/2	1	1/2			0.02	0.02
31	0	1/2	2	2	2	2	1/2	5/2	1	1/2			0.03	0.03
32	0	1/2	1	3	2	1	1/2	3/2	1	1/2			0.06	0.06
33	0	1/2	1	3	2	2	1/2	5/2	1	1/2			0.07	0.08
34	0	1/2	2	4	2	2	1/2	5/2	1	1/2			0.03	0.03
35	1	-1/2	1	1	2	1	3/2	3/2	1	3/2			0.04	0.05
36	1	-1/2	1	1	2	1	3/2	5/2	1	3/2			0.16	0.19
37	1	-1/2	2	0	2	0	3/2	3/2	1	3/2			0.02	0.02
38	1	-1/2	0	2	2	0	3/2	3/2	1	3/2			0.09	0.11
39	1	-1/2	2	2	2	0	3/2	3/2	1	3/2			0.02	0.02
40	1	-1/2	3	1	2	1	3/2	3/2	1	3/2			0.01	0.01
41	1	-1/2	3	1	2	1	3/2	5/2	1	3/2			0.04	0.04
42	1	-1/2	1	3	2	1	3/2	3/2	1	3/2			0.02	0.02
43	1	-1/2	1	3	2	1	3/2	5/2	1	3/2			0.09	0.10
44	1	-1/2	3	3	2	1	3/2	3/2	1	3/2			0.00	0.01
45	1	-1/2	3	3	2	1	3/2	5/2	1	3/2			0.02	0.02
46	1	-1/2	2	4	2	0	3/2	3/2	1	3/2			0.02	0.02
47	1	-1/2	3	5	2	1	3/2	3/2	1	3/2			0.00	0.00
48	1	-1/2	3	5	2	1	3/2	5/2	1	3/2			0.02	0.02

## 3.2 Modell der schwachen Wechselwirkung, Stromoperatoren

Der Operator des schwachen Stroms  $J^\mu(x)$  besteht aus einem vektoriellen und einem axialen Anteil,

$$J^\mu(x) = J_V^\mu(x) + J_A^\mu(x). \quad (3.10)$$

Diese beiden Anteile werden wir in den folgenden beiden Unterabschnitten separat diskutieren. Beide Anteile setzen sich aus Einnukleonen-, Zweinukleonen- und  $\Delta$ -Isobar-Beiträgen zusammen. Die verwendeten Operatorbeiträge sind nach Potenzen von  $p/m$  entwickelt, wobei  $p$  ein charakteristischer Impuls und  $m$  die Nukleonenmasse ist. Beiträge bis zur relativistischen Ordnung  $(p/m)^2$  sind in unseren Rechnungen berücksichtigt worden. Bei den  $\Delta$ -Isobar-Beiträgen erfolgte eine Beschränkung auf die nicht-relativistische Ordnung. Die analytische Gestalt der verwendeten Operatoren geben wir explizit in Anhang C an. Dort und im folgenden erweist es sich als günstig, den Fourier-transformierten Stromoperator

$$J^\mu(\vec{k}) = \int d^3x e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} J^\mu(\vec{x}, t=0) \quad (3.11)$$

einzuführen.

### 3.2.1 Vektorielle Stromoperatoren

Der Vektoranteil des schwachen Stroms ist aufgrund der *Conserved Vector Current* (CVC) Relation [16] mit dem Isektoranteil des elektromagnetischen (e.m.) Stroms verknüpft. Die Operatoren dieser beiden Ströme unterscheiden sich nur in ihrem Isospin-Anteil. Dies bedeutet, daß wir zur Beschreibung des schwachen vektoriellen Stroms Operatoren verwenden können, die bereits in der Beschreibung e.m. Reaktionen verwendet und getestet wurden. Die wichtigste Anforderung an den vektoriellen Stromoperator ist wie für den e.m. Stromoperator die Stromerhaltung,

$$\vec{k} \cdot \vec{J}_V(\vec{k}) = [H, J_V^0(\vec{k})]. \quad (3.12)$$

Der Hamilton-Operator (3.1) besteht aus einem Einkörper-Anteil  $T = \sum_i \vec{p}_i^2 / 2m_i$  und einem Zweikörper-Anteil  $V = \sum_{i,j} V_{ij}$ . Ebenso besitzt der Stromoperator  $J_V^\mu(\vec{k})$  im allgemeinen Ein- und Zweikörper-Anteile,

$$J_V^\mu(\vec{k}) = J_V^\mu(1, \vec{k}) + J_V^\mu(2, \vec{k}). \quad (3.13)$$

Die Aufspaltung der Operatoren in Ein- und Zweikörper-Anteile kann angesehen werden als eine Entwicklung in der starken Kopplungskonstanten  $g$ .  $T$  und  $J_V^\mu(1, \vec{k})$  sind von der Ordnung  $g^0$ ,  $V$  und  $J_V^\mu(2, \vec{k})$  von der Ordnung  $g^2$ . Die Kontinuitätsgleichung kann entsprechend nach Potenzen von  $g$  zerlegt werden,

$$\vec{k} \cdot \vec{J}_V(1, \vec{k}) = [T, J_V^0(1, \vec{k})] \quad (3.14a)$$

$$\vec{k} \cdot \vec{J}_V(2, \vec{k}) = [T, J_V^0(2, \vec{k})] + [V, J_V^0(1, \vec{k})] \quad (3.14b)$$

$$0 = [V, J_V^0(2, \vec{k})] \quad (3.14c)$$

Für realistische  $NN$ -Potentiale ist in der Regel  $[V, J_V^0(1, \vec{k})] \neq 0$ . Das Einpion-Austausch-Potential z.B. hat einen Isospinanteil der Form  $\vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2$ . Dieser Operator vertauscht nicht mit dem Isektoranteil der Ladung, der proportional zu  $(\vec{\tau}_i)_3$  ( $i = 1, 2$ ) ist, und führt dazu, daß der Kommutator von Potential und Einkörper-Ladung nicht verschwindet. Dies hat zwingend die Existenz von Zweikörper-Strömen zur Folge, andernfalls wäre die Stromerhaltung verletzt. Nach der Siebert Hypothese [42] treten Zweikörper-Korrekturen zur Ladung erst in relativistischer Ordnung auf. Daher müssen räumliche Zweikörper-Ströme dafür sorgen, daß die Stromerhaltung in nicht-relativistischer Ordnung gewährleistet ist.

Aus physikalischer Sicht ist es plausibel, daß der Strom wechselwirkender Nukleonen gegenüber dem nicht-wechselwirkender Nukleonen verändert ist. Im Mesonaustauschbild, welches den verwendeten Kraftmodellen zugrundeliegt, tragen auch die ausgetauschten Mesonen zum Gesamtstrom bei. Nach dem Einfrieren der mesonischen Freiheitsgrade durch die Definition des  $NN$ -Potentials müssen diese zusätzlichen, von Mesonen herrührenden Stromanteile in effektiven Zweikörper-Operatoren berücksichtigt werden, die daher auch als Mesonaustauschströme (*Meson Exchange Currents* = MEC) bezeichnet werden.

In den erweiterten Kraftmodellen  $A2$  und  $C2$  erfährt der Strom eine weitere Modifikation dadurch, daß das  $\Delta$ -Isobar als expliziter Freiheitsgrad behandelt wird und somit direkt zum Strom beiträgt. Die von uns verwendeten Operatoren, die in den Abbildungen 3.4 und 3.5 diagrammatisch dargestellt sind und deren explizite analytische Gestalt in Anhang C angegeben ist, wollen wir nun im Detail diskutieren.

### Einnukleonen-Ströme

In den Einukleonen-Operatoren (C.1) ersetzen wir die nukleonischen Pauli-Dirac-Formfaktoren  $f_1^{IS(IV)}$  und  $f_2^{IS(IV)}$  durch die Sachs-Formfaktoren

$$\begin{aligned} g_E^{IS(IV)}(k_\mu^2) &= f_1^{IS(IV)}(k_\mu^2) + \frac{k_\mu^2}{4m^2} f_2^{IS(IV)}(k_\mu^2), \\ g_M^{IS(IV)}(k_\mu^2) &= f_1^{IS(IV)}(k_\mu^2) + f_2^{IS(IV)}(k_\mu^2). \end{aligned}$$

Diese Ersetzung ist dadurch motiviert, daß der Sachs-Formfaktor  $g_E$  in nicht-relativistischer Näherung eine bessere Beschreibung des Nukleons liefert als der Dirac-Formfaktor  $f_1$ , und wurde auch in älteren Standard-Rechnungen der Kerntheoriegruppe Hannover [45] benutzt. Abweichend von Referenz [45] wählen wir anstelle der alten Parametrisierung der nukleonischen Formfaktoren von Blatnik und Zovko [11] die aktuellere Parametrisierung von Mergell, Meissner und Drechsel [31].

In der Ladung sind neben dem nicht-relativistischen Operator auch die relativistischen Korrekturen der Ordnung  $(p/m)^2$  berücksichtigt. Beim räumlichen Strom beschränken wir uns hingegen auf die nicht-relativistische Ordnung, da die im Anhang C dargestellten relativistischen Korrekturen von der Ordnung  $(p/m)^3$  und daher nicht berücksichtigt sind.

### Zweinnukleonen-Ströme

Das Hauptanliegen dieser Arbeit ist die Beschreibung der Myon-Einfang-Reaktion  $\mu + {}^3\text{He} \longrightarrow \nu_\mu + {}^3\text{H}$ . Daher sind die erst in relativistischer Ordnung auftretenden Zweikörper-Korrekturen zur Ladung nicht berücksichtigt worden, da sie im für Myon-Einfang relevanten Niederenergie-Bereich unbedeutend sind [23].

Die verwendeten nicht-relativistischen räumlichen Zweinnukleonen-Ströme stammen vom  $\pi$ - und  $\rho$ -Meson-Austausch. und sind den Referenzen [45, 4, 7] entnommen. Die pionischen Austauschströme sind von nicht-relativistischer Ordnung  $(p/m)^1$ . Die  $\rho$ -MEC treten hingegen erst in relativistischer Ordnung  $(p/m)^3$  auf und müßten aufgrund unserer Auswahlkriterien eigentlich weggelassen werden. Sie bilden jedoch eine Ausnahme, da sie teilweise eine sehr große Kopplungskonstante besitzen. Da das Verhältnis von Tensor- zu Vektor-Kopplung  $\kappa_\rho = f_{\rho NN}/g_{\rho NN}$  für das Paris-Potential den Wert 6.50 und für das OBEPQ-Potential den Wert 6.10 besitzt, sind die sogenannten Pauli-Operatoren, die proportional zu  $(1 + \kappa_\rho)^2$  sind, mitberücksichtigt worden. In all diesen potentialartigen Strömen tritt der isovektorielle Formfaktor  $f_1^{IV}(k_\mu^2)$  auf.

Neben den erwähnten Austauschströmen vom  $\pi$ - und  $\rho$ -Meson sind auch die nicht-potentialartigen  $\omega\pi\gamma$  und  $\rho\pi\gamma$ -Ströme berücksichtigt worden. Letzterer trägt aufgrund seines isoskalaren Charakters nicht zum Myon-Einfang bei, wohl aber zur Elektronenstreuung. In diesen Operatoren wurden die Kopplungs-



konstanten  $g_{\omega\pi\gamma} = 0.680$  und  $g_{\rho\pi\gamma} = 0.578$  sowie die Formfaktoren  $f_{\omega\pi\gamma}(k_\mu^2) = f_1^{IV}(k_\mu^2)$  und  $f_{\rho\pi\gamma}(k_\mu^2) = f_1^{IS}(k_\mu^2)$  benutzt.

In den Austauschströmen treten starke Formfaktoren  $f_{BNN}(\vec{q}^2)$  ( $B = \pi, \rho, \omega$ ) auf, die die Nicht-Punktförmigkeit der Meson-Nukleon-Wechselwirkung berücksichtigen. Diese Formfaktoren sind konsistent mit dem verwendeten Potential zu wählen. Sie besitzen die analytische Gestalt

$$f_{BNN}(\vec{q}^2) = \left( \frac{\Lambda_B^2 - m_B^2}{\Lambda_B^2 + \vec{q}^2} \right)^{\frac{n_B}{2}}. \quad (3.15)$$

Die hierin auftretenden, für das Paris- und das OBEPQ-Potential verwendeten Parameter sind zusammen mit der entsprechenden Meson-Nukleon-Kopplungskonstante  $g_{BNN}/\sqrt{4\pi}$  in den Tabellen 3.3 und 3.4 angegeben. Im OBEPQ-Potential tauchen diese explizit auf, so daß sie vollständig festgelegt sind. Beim dispersionstheoretisch motivierten Paris-Potential ist hingegen nicht explizit vorgeschrieben, wie diese Parameter zu wählen sind. Sie sind an dieser Stelle aus Ref. [20] entnommen. Es muß aber erwähnt werden, daß auch andere Wahlen möglich sind, wodurch eine theoretische Unsicherheit erzeugt wird. Von diesem theoretischen Standpunkt aus ist das OBEPQ-Potential dem Paris-Potential vorzuziehen.

B	$m_B$ [MeV]	$\Lambda_B$ [MeV]	$\frac{g_{BNN}^2}{4\pi}$	$n_B$
$\pi$	138.03	1200	14.50	1
$\rho$	770.00	2000	0.55	1
$\omega$	782.60	1500	20.00	1

**Tabelle 3.3 :** Die in den starken Formfaktoren auftretenden Meson-Parameter und die Meson-Nukleon-Kopplungskonstanten für das Paris-Potential.

B	$m_B$ [MeV]	$\Lambda_B$ [MeV]	$\frac{g_{BNN}^2}{4\pi}$	$n_B$
$\pi$	138.03	1300	14.60	2
$\rho$	769.00	2000	0.81	4
$\omega$	782.60	1500	20.00	2

**Tabelle 3.4 :** Die in den starken Formfaktoren auftretenden Meson-Parameter und die Meson-Nukleon-Kopplungskonstanten für das OBEPQ-Potential.

### $\Delta$ -Isobar-Ströme

Da das  $\Delta$ -Isobar in der Dreiteilchen-Wellenfunktion mit etwa 2%-Aufenthaltswahrscheinlichkeit (siehe Tabelle 3.2) ein relativ kleines Gewicht hat, beschränken wir uns bei den  $\Delta$ -Isobar-Strömen auf die nicht-relativistische Ordnung. In der Einkörper-Ladung gibt es in dieser Ordnung nur einen diagonalen  $\Delta\Delta$ -Beitrag, während sich der räumliche Einkörper-Strom aus einem diagonalen  $\Delta\Delta$ -Beitrag und einem  $N\Delta$ -Übergangsbeitrag zusammensetzt. Die in diesen Operatoren auftretenden Formfaktoren sind in Übereinstimmung mit Ref. [20] gewählt worden,

$$\begin{aligned} G_{E0}^{\Delta}(k_{\mu}^2) &= G_E^p(k_{\mu}^2), \\ G_{M1}^{\Delta}(k_{\mu}^2) &= \frac{m_{\Delta}}{3m} G_M^p(k_{\mu}^2) \\ G_{M1}^{\Delta N}(k_{\mu}^2) &= \frac{G_{M1}^{\Delta N}(0)}{\left(1 - \frac{k_{\mu}^2}{\Lambda_{N\Delta}^2}\right)^2}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

mit den Parametern  $G_{M1}^{\Delta N}(0) = 6.366$ ,  $\Lambda_{N\Delta} = 841.8$  MeV und  $m_{\Delta} = 1232$  MeV. Die Austauschströme mit  $\Delta$ -Isobar sind alle vom  $N\Delta$ -Übergangstyp, da auch in den erweiterten Kraftmodellen nur dieser Übergang vorkommt.

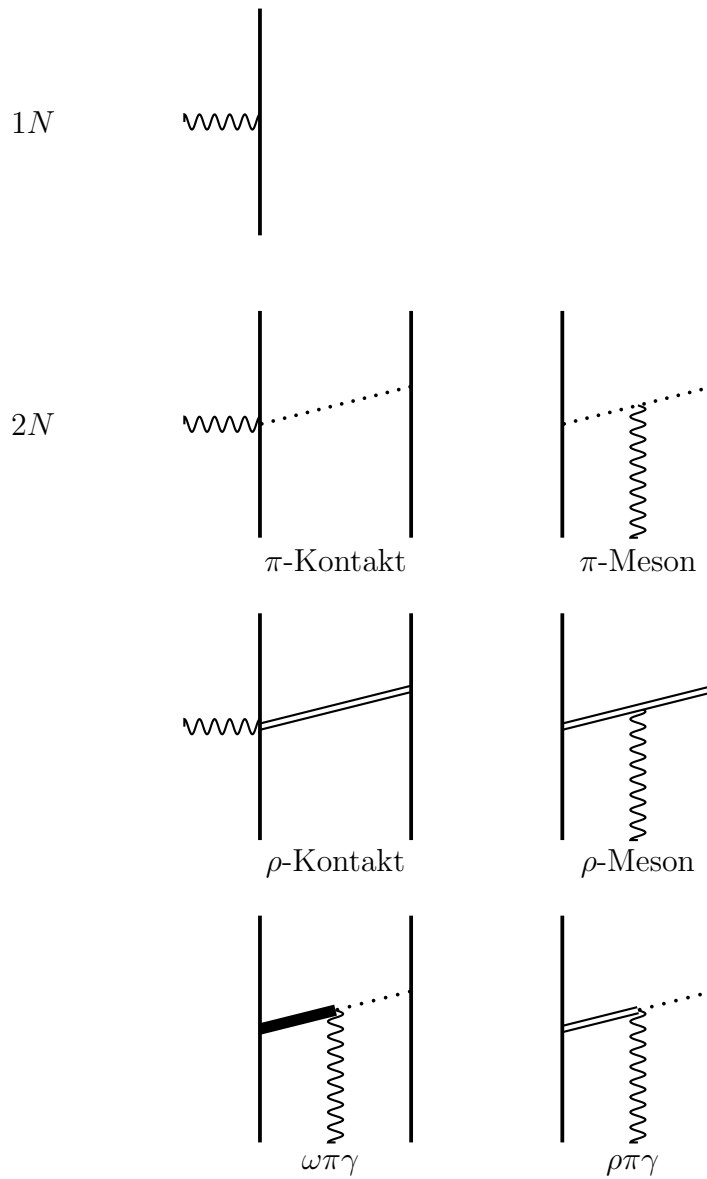
Die Austauschströme mit  $\Delta$ -Isobar-Anregung erhält man formal dadurch, daß man in den rein-nukleonischen Austauschströmen einen  $BNN$ -Vertex durch einen  $BN\Delta$ -Vertex ersetzt. Die potentialartigen Ströme stimmen mit denen von Ref. [45] überein, die  $\omega\pi\gamma$  und  $\rho\pi\gamma$ -Ströme mit  $\Delta$ -Isobar-Anregung sind erstmalig in dieser Arbeit verwendet worden. In den Austauschströmen mit  $\Delta$ -Isobar-Anregung treten die starken Meson-Nukleon- $\Delta$  Formfaktoren auf

$$f_{BN\Delta}(\vec{q}^2) = \left( \frac{\Lambda_{BN\Delta}^2 - m_B^2}{\Lambda_{BN\Delta}^2 + \vec{q}^2} \right)^{\frac{n_{BN\Delta}}{2}}. \quad (3.17)$$

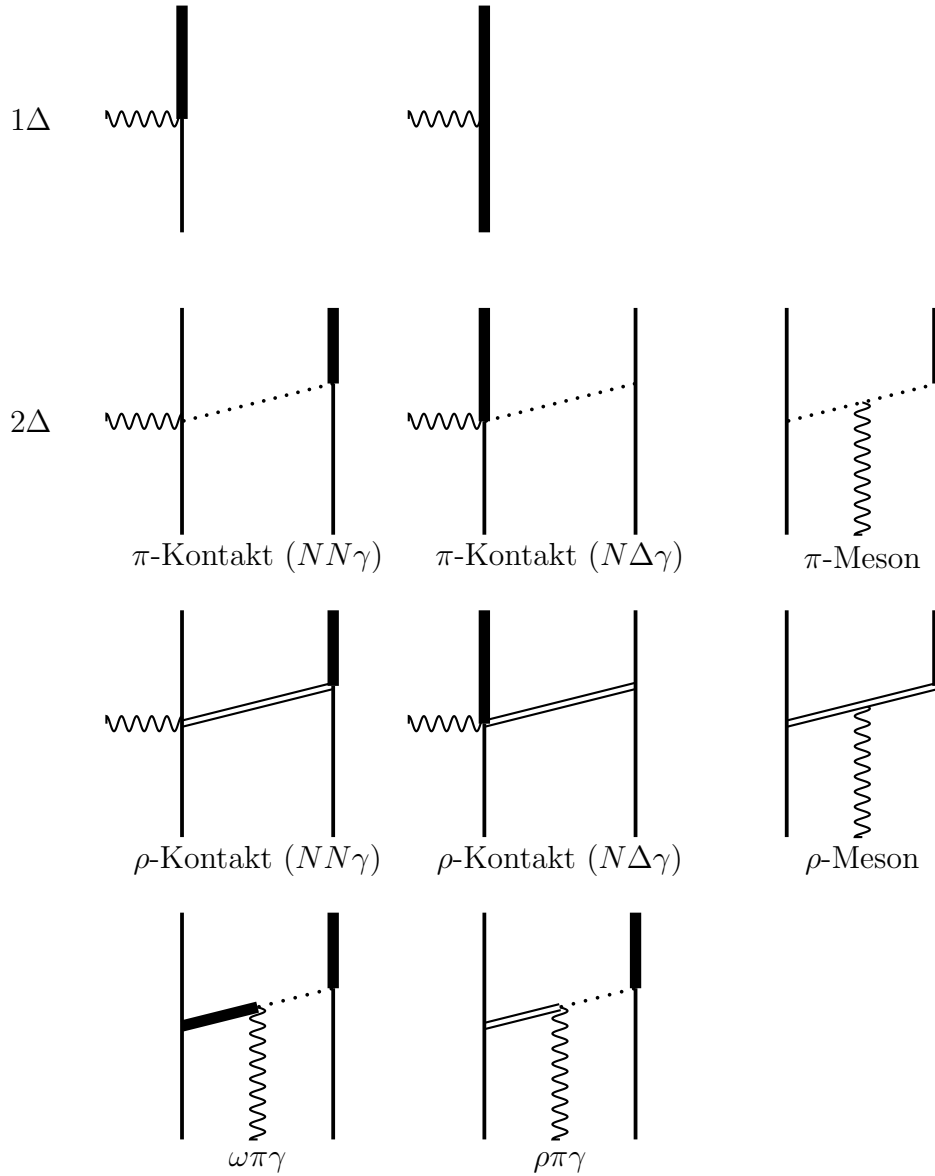
sowie die Meson-Nukleon- $\Delta$ -Kopplungskonstanten  $g_{BN\Delta}/\sqrt{4\pi}$  auf. Die Parameter für die erweiterten Kraftmodelle A2 und C2 sind in Tabelle 3.5 aufgelistet.

B	$\Lambda_{BN\Delta}$ [MeV]	$g_{BN\Delta}^2/4\pi$	$n_{BN\Delta}$
$\pi$	1200	$14.50 \times 0.35/0.08$	1
$\rho$	2000	$0.55 \times 22.8/5.20$	1

**Tabelle 3.5 :** Die in den Meson-Nukleon- $\Delta$ -Formfaktoren auftretenden Parameter und die Meson-Nukleon- $\Delta$ -Kopplungskonstanten für die erweiterten Kraftmodelle A2 und C2. Das  $\omega$ -Meson taucht in den erweiterten Kraftmodellen nicht auf, da es ein isoskales Teilchen ist.



**Abbildung 3.4:** Diagrammatische Darstellung der von uns benutzten vektoriellen Ein- und Zweinukleonen-Ströme. Der  $\rho\pi\gamma$ -Strom hat isoskalaren Charakter und trägt daher nicht zum Myon-Einfang, wohl aber zur Elektronen-Streuung bei.



**Abbildung 3.5:** In den erweiterten Kraftmodellen wird das  $\Delta$ -Isobar als expliziter Freiheitsgrad behandelt. Hierdurch entstehen die zusätzlichen  $\Delta$ -Isobar-Ströme, die sowohl von Einkörper- als auch von Zweikörper-Natur sind.

### 3.2.2 Axiale Stromoperatoren

Im Vergleich zum vektoriellen Anteil ist der axiale Anteil des schwachen Stroms viel weniger bekannt. Eine wichtige Forderung an den axialen Stromoperator ist, daß er die *Partially Conserved Axial Current* (= PCAC) Relation [17],

$$k_\mu J_A^\mu(\vec{k}) = -if_\pi \frac{m_\pi^2}{m_\pi^2 - k_\mu^2} M(\vec{k}), \quad (3.18)$$

erfüllt.  $f_\pi$  ist hierbei die Pion-Zerfallskonstante und  $M(\vec{k})$  der Pion-Absorptionsoperator. Im Fall verschwindender Pion-Masse  $m_\pi$  wäre der axiale Strom  $J_A^\mu(\vec{k})$  exakt erhalten. Da  $m_\pi$  auf der hadronischen Massenskala klein ist, spricht man von partieller oder näherungsweise Stromerhaltung. Wenn man von  $J_A^\mu(\vec{k})$  den durch  $M(\vec{k})$  bestimmten  $\pi$ -Pol-Anteil

$$J_A^{\pi-Pol,\mu}(\vec{k}) = -if_\pi \frac{k^\mu}{m_\pi^2 - k_\mu^2} M(\vec{k}) \quad (3.19)$$

abspaltet, muß der restliche Strom  $J_A'^\mu(\vec{k}) = J_A^\mu(\vec{k}) - J_A^{\pi-Pol,\mu}(\vec{k})$  die mit (3.12) vergleichbare Relation

$$\vec{k} \cdot \vec{J}_A(\vec{k}) = [H, J_A^0(\vec{k})] + if_\pi M(\vec{k}) \quad (3.20)$$

erfüllen [5]. Die Wechselwirkung der Nukleonen modifiziert auch den axialen Anteil des Stroms. Um die PCAC-Relation zu erfüllen, müssen neben axialen Einnukleonen-Strömen auch axiale Zweinukleonen-Ströme und  $\Delta$ -Isobar-Ströme berücksichtigt werden. Die von uns verwendeten Operatoren, die in den Abbildungen 3.6 diagrammatisch dargestellt, werden nun im Detail besprochen.

#### Einnukleonen-Ströme

Im axialen Einnukleonen-Strom (C.31) treten die beiden Formfaktoren  $f_A(k_\mu^2)$  und  $f_P(k_\mu^2)$  auf. Für  $f_A(k_\mu^2)$  verwenden wir die Dipol-Parametrisierung

$$f_A(k_\mu^2) = \frac{f_A(0)}{\left(1 - \frac{k_\mu^2}{m_A^2}\right)^2}$$

mit  $f_A(0) = -1.257$  und  $m_A = 1120$  MeV. Sie liefert beim Viererimpulsübertrag des Myon-Einfangs den Wert  $f_A(-0.954m_\mu^2) = -1.236$ , was in Übereinstimmung mit [14] ist. Für den pseudoskalaren Formfaktor  $f_P(k_\mu^2)$  nehmen wir die sich aus der PCAC-Relation ergebende Form,

$$f_P(k_\mu^2) = \frac{4m^2}{m_\pi^2 - k_\mu^2} f_A(k_\mu^2).$$

Mit der Nukleonmasse  $m = 938.926$  MeV, der Pion-Masse  $m_\pi = 138.03$  MeV und der Myon-Masse  $m_\mu = 105.66$  MeV ergibt sich der Wert  $f_P(-0.954m_\mu^2) = -146.7$ . In der Literatur findet man häufig den wie folgt normierten Formfaktor  $g_P(k_\mu^2) = (m_\mu/2m)f_P(k_\mu^2)$ , der den Wert  $g_P(-0.954m_\mu^2) = -8.25$  annimmt.

### Zweinukleonen-Ströme

In Ref. [5] sind ausgehend von einer nicht-linearen phänomenologischen Lagrangendichte des  $N\pi\rho A_1$  Systems [25, 2] die axialen MEC im Rahmen der erweiterten S-Matrix-Methode abgeleitet worden. Das  $A_1$ -Meson tritt dabei als chiraler Partner des  $\rho$ -Mesons auf. Es hat die Masse  $m_{A_1} = 1260$  MeV.

Es stellt sich heraus (siehe Kapitel 4), daß die axialen Formfaktoren  $F_A(k_\mu^2)$  und  $F_P(k_\mu^2)$  des gebundenen Dreinukleonen-Systems durch den räumlichen Anteil  $\vec{J}_A(\vec{k})$  des axialen Stromoperators bestimmt werden. Da die räumlichen axialen MEC als relativistische Korrekturen auftreten, beschränken wir uns auf die MEC von der Reichweite des Pions. Die Untersuchung in [3, 5] hat bestätigt, daß der Einfluß von axialen Austauschströmen kürzerer Reichweite bei verschwindendem Impulsübertrag vernachlässigbar ist.

In den in der zweiten Reihe dargestellten Austauschströmen tritt der zusätzliche externe Formfaktor  $F_{\pi\rho}(k_\mu^2)$  auf, für den wir die gleiche  $k_\mu^2$ -Abhängigkeit annehmen wie für  $f_A(k_\mu^2)$ ,

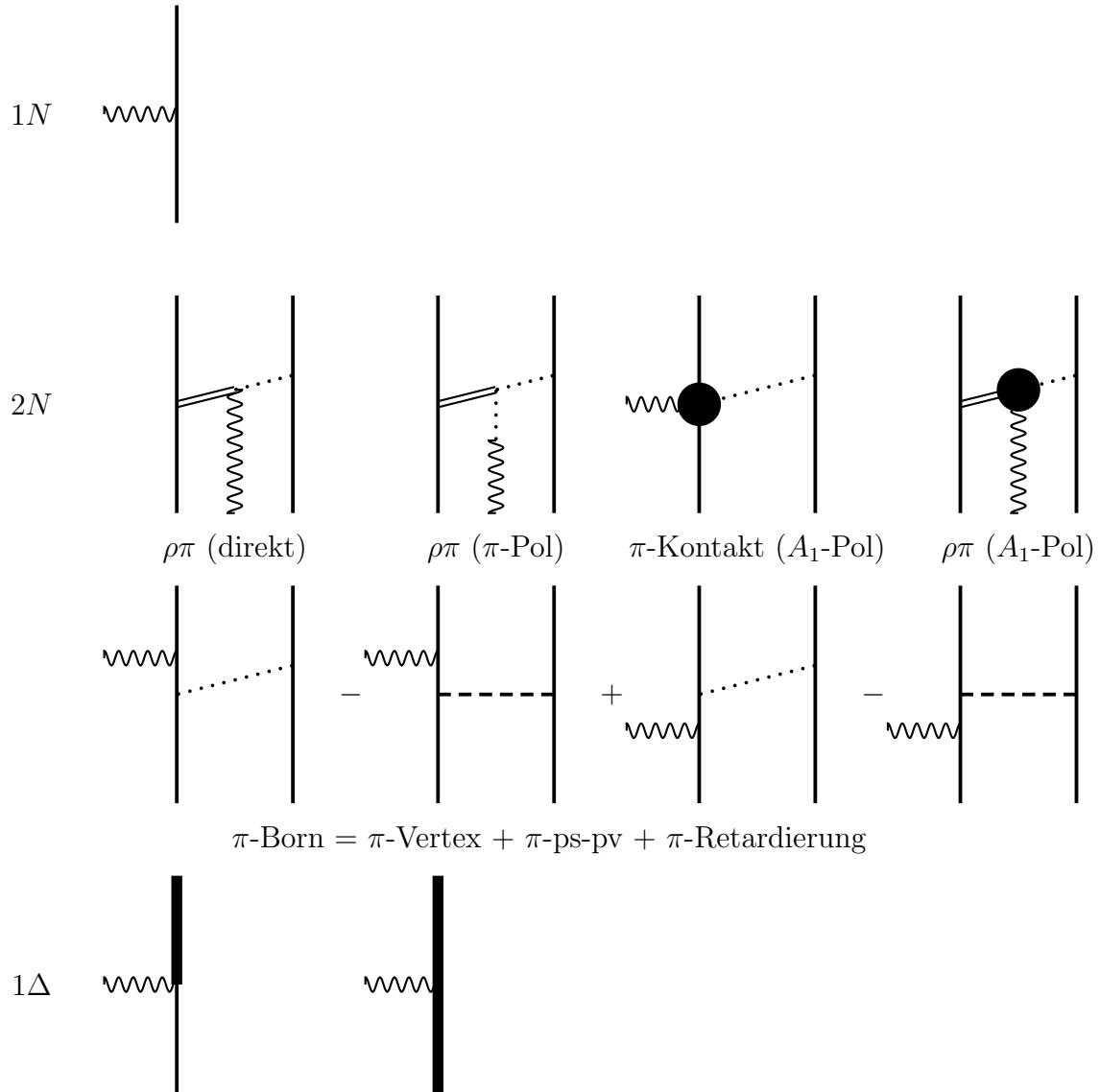
$$F_{\pi\rho}(k_\mu^2) = \frac{f_A(k_\mu^2)}{f_A(0)}.$$

Im axialen Stromanteil setzen wir die Konstante  $\kappa_\rho = 3.7$  in Übereinstimmung mit Ref. [5]. Es ist zu beachten, daß in der relativischen Ordnung auch die Born-Austauschströme berücksichtigt werden müssen, die sich aus der Differenz zwischen den quantenfeldtheoretischen und den quantenmechanischen Diagrammen ergeben (Abbildung 3.6, zweite Reihe von unten). Ein Unterschied resultiert z.B. daher, daß die innere Nukleonlinie im quantenfeldtheoretischen Diagramm auch die Propagation eines Anti-Nukleons beschreibt, welches in der quantenmechanischen Beschreibung nicht vorhanden ist. Für den in den Born-Operatoren auftretenden off-shell Parameter  $\tilde{\mu}$  ist beim Paris-Potential der Wert  $\tilde{\mu} = 0$ , beim OBEPQ-Potential der Wert  $\tilde{\mu} = -1$  zu wählen [6, 18]. Die in den Austauschströmen auftretenden starken Formfaktoren werden wie beim Vektorstrom in Konsistenz mit dem zugrundeliegenden Kraftmodell verwendet.

**$\Delta$ -Isobar-Ströme**

Wie beim vektoriellen Strom beschränken wir uns auch beim axialen Strom auf nicht-relativistische  $\Delta$ -Isobar-Ströme. Da die räumlichen Zweikörper-Ströme nur als relativistische Korrekturen auftreten, sind von uns nur  $\Delta$ -Isobar-Ströme von Einkörper-Natur berücksichtigt worden. Für die axialen Formfaktoren werden die gleichen Formfaktoren wie in Ref. [5] verwendet,

$$\begin{aligned} f_{A(P)}^{N\Delta}(k_\mu^2) &= \sqrt{\frac{0.35}{0.08}} f_{A(P)}(k_\mu^2), \\ f_{A(P)}^{\Delta\Delta}(k_\mu^2) &= \frac{1}{\sqrt{5}} f_{A(P)}(k_\mu^2). \end{aligned}$$



**Abbildung 3.6:** Die von uns berücksichtigten axialen Stromoperatoren. Die Wellenlinie symbolisiert in dieser Abbildung die Kopplung des axialen Stroms an die Hadronen. Das  $A_1$ -Meson ist als schwarzer Kreis dargestellt. Die in den beiden mittleren Reihen dargestellten räumlichen axialen MEC treten als relativistische Korrekturen auf.



# Kapitel 4

## Berechnung des schwachen nuklearen Stroms

Nachdem wir im vorangegangenen Kapitel das Modell für den schwachen nuklearen Strom vorgestellt haben, wenden wir uns jetzt der konkreten Berechnung dieses Stroms zu. Zunächst setzen wir das Matrixelement des Fourier-transformierten Stromoperators (3.11) in Relation zu dem in Kapitel 2 auftretenden Strom (2.10),

$$\begin{aligned}
 & \langle \vec{p}_{3\text{H}} \Psi_{3\text{H}S3\text{H}} | J^\mu(\vec{k}) | \vec{p}_{3\text{He}} \Psi_{3\text{He}S3\text{He}} \rangle \\
 &= \int d^3x e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \langle \vec{p}_{3\text{H}} \Psi_{3\text{H}S3\text{H}} | J^\mu(\vec{x}, t=0) | \vec{p}_{3\text{He}} \Psi_{3\text{He}S3\text{He}} \rangle \\
 &= \int d^3x e^{i(\vec{k}+\vec{p}_{3\text{He}}-\vec{p}_{3\text{H}})\cdot\vec{x}} \langle \vec{p}_{3\text{H}} \Psi_{3\text{H}S3\text{H}} | J^\mu(\vec{x}=0, t=0) | \vec{p}_{3\text{He}} \Psi_{3\text{He}S3\text{He}} \rangle \\
 &= (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p}_{3\text{H}} - \vec{p}_{3\text{He}} - \vec{k}) \langle \vec{p}_{3\text{H}} \Psi_{3\text{H}S3\text{H}} | J^\mu(x=0) | \vec{p}_{3\text{He}} \Psi_{3\text{He}S3\text{He}} \rangle. \quad (4.1)
 \end{aligned}$$

Hierbei haben wir die Translationsinvarianz  $J^\mu(\vec{x}, t) = e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} J^\mu(\vec{x}=0, t) e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}}$  ausgenutzt. Die verwendeten Fourier-transformierten Stromoperatoren  $J^\mu(\vec{k})$  sind explizit im Anhang C angegeben. Ihre Matrixelemente haben im Impulsraum des Dreiteilchen-Systems die allgemeine Struktur,

$$\langle \vec{P}' \vec{p}' \vec{q}' | J^\mu(\vec{k}) | \vec{P} \vec{p} \vec{q} \rangle = \delta^{(3)}(\vec{P}' - \vec{P} - \vec{k}) \langle \vec{p}' \vec{q}' | j^\mu(\vec{k}, \vec{P}) | \vec{p} \vec{q} \rangle. \quad (4.2)$$

Das Gesamtmatrixelement eines Stromoperators ist somit das Produkt aus einer impulserhaltenden  $\delta$ -Funktion und einem Matrixelement eines “effektiven” Operators  $j^\mu(\vec{k}, \vec{P})$ , welcher nur noch auf innere Freiheitsgrade wirkt. Vergleich von (4.1) und (4.2) liefert unter Berücksichtigung von (3.5),

$$\begin{aligned}
 & \langle \vec{p}_{3\text{H}} \Psi_{3\text{H}S3\text{H}} | J^\mu(x=0) | \vec{p}_{3\text{He}} \Psi_{3\text{He}S3\text{He}} \rangle \\
 &= \frac{1}{(2\pi)^3} \langle \Psi_{3\text{H}S3\text{H}} | j^\mu(\vec{k}, \vec{p}_{3\text{He}}) | \Psi_{3\text{He}S3\text{He}} \rangle \Big|_{\vec{k}=\vec{p}_{3\text{H}}-\vec{p}_{3\text{He}}}. \quad (4.3)
 \end{aligned}$$

Hierbei sind  $|\Psi_{^3\text{He}S^3\text{He}}\rangle$  und  $|\Psi_{^3\text{H}S^3\text{H}}\rangle$  die in Abschnitt 3.1 beschriebenen Wellenfunktionen des gebundenen Dreinukleonen-Systems. Relation (4.3) bildet den Ausgangspunkt für die weiteren Abschnitte dieses Kapitels. In Abschnitt 4.1 entwickeln wir zunächst den “effektiven” Stromoperator  $j^\mu(\vec{k}, \vec{p}_{^3\text{He}})$  nach Multipoloperatoren. Hierfür verwenden wir ein kollineares Bezugssystem. Der schwache nukleare Strom läßt sich daraufhin als Summe von reduzierten Multipolmatrixelementen (RME) darstellen. In Abschnitt 4.2 setzen wir dann die Formfaktoren des schwachen nuklearen Stroms (2.10) in Relation zu diesen RME. Die konkrete Berechnung der RME für Einkörper- und Zweikörper-Ströme wird schließlich in Abschnitt 4.3 beschrieben. Der zugehörige Formalismus wurde so allgemein entwickelt, daß er sich auch zur (zukünftigen) Beschreibung elektroschwacher Aufbruchreaktionen am gebundenen Dreinukleonen-System verwenden läßt.

## 4.1 Multipolentwicklung

Zur Berechnung des schwachen nuklearen Stroms wählen wir ein kollineares Bezugssystem, d.h. ein System in dem der Impulsübertrag  $\vec{k}$  und der Impuls des  $^3\text{He}$ -Kerns  $\vec{p}_{^3\text{He}}$  parallel oder antiparallel sind. Solch ein System wird vollständig fixiert durch den Bezugssystem-Parameter  $\alpha$ , der über die Relation

$$\vec{p}_{^3\text{He}} = \frac{1}{2}(\alpha - 1)\vec{k} \quad (4.4)$$

definiert ist.  $\alpha = 0$  entspricht dem Breit-System,  $\alpha = 1$  dem Labor-System und  $\alpha = -1$  dem Anti-Labor-System. Der Stromoperator  $j^\mu(\vec{k}, \vec{p}_{^3\text{He}})$  hängt jetzt nur noch von  $\vec{k}$  und  $\alpha$  ab,

$$j^\mu(\vec{k}, \alpha) = j^\mu(\vec{k}, \vec{p}_{^3\text{He}}) \Big|_{\vec{p}_{^3\text{He}} = \frac{1}{2}(\alpha-1)\vec{k}}. \quad (4.5)$$

Für ihn führen wir eine Multipolentwicklung durch,

$$\rho(\vec{k}, \alpha) = 4\pi \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m_j=-j}^j i^j T_{\text{coul } m_j}^{(j)}(k, \alpha) Y_{m_j}^{(j)*}(\hat{k}), \quad (4.6)$$

$$\vec{j}(\vec{k}, \alpha) = 4\pi \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m_j=-j}^j \sum_{I=j-1, j, j+1} i^j T_{m_j}^{([I]j)}(k, \alpha) \vec{Y}_{m_j}^{([I]j)*}(\hat{k}), \quad (4.7)$$

bei der die  $\hat{k}$ -Abhängigkeit mit Hilfe der im Anhang A definierten Kugel- und Vektorkugelfunktionen explizit abgespalten wird. Die Coulomb-Multipoloperatoren  $T_{\text{coul } m_j}^{(j)}(k, \alpha)$  und die Multipoloperatoren des räumlichen Stroms  $T_{m_j}^{([I]j)}(k, \alpha)$  sind folgendermaßen definiert,

$$T_{\text{coul } m_j}^{(j)}(k, \alpha) = \frac{(-i)^j}{4\pi} \int d^2\hat{k} Y_{m_j}^{(j)}(\hat{k}) \rho(\vec{k}, \alpha), \quad (4.8)$$

$$T_{m_j}^{([I]j)}(k, \alpha) = \frac{(-i)^j}{4\pi} \int d^2\hat{k} \{Y^{(I)}(\hat{k}) \otimes j^{(1)}(\vec{k}, \alpha)\}_{m_j}^{(j)}. \quad (4.9)$$

Sie hängen nur noch vom Betrag des Impulsübertrages  $k = |\vec{k}|$  und von  $\alpha$  ab. Die Abhängigkeit von  $\alpha$  wird im folgenden in der Notation unterdrückt. Es erweist sich als nützlich, die magnetischen, elektrischen und longitudinalen Multipoloperatoren einzuführen,

$$T_{\text{magn } m_j}^{(j)}(k) = T_{m_j}^{([j1]j)}(k), \quad (4.10)$$

$$T_{\text{elec } m_j}^{(j)}(k) = - \left\{ \sqrt{\frac{j+1}{2j+1}} T_{m_j}^{([(j-1)1]j)}(k) + \sqrt{\frac{j}{2j+1}} T_{m_j}^{([(j+1)1]j)}(k) \right\}, \quad (4.11)$$

$$T_{\text{long } m_j}^{(j)}(k) = - \left\{ \sqrt{\frac{j}{2j+1}} T_{m_j}^{([(j-1)1]j)}(k) - \sqrt{\frac{j+1}{2j+1}} T_{m_j}^{([(j+1)1]j)}(k) \right\}. \quad (4.12)$$

Die longitudinalen Multipoloperatoren sind für  $j \geq 0$  definiert, die magnetischen und elektrischen Multipoloperatoren für  $j \geq 1$ .

Da die Multipoloperatoren irreduzible Tensoroperatoren sind, läßt sich zur Berechnung von Matrixelementen zwischen Drehimpulseigenzuständen  $|JM_J\rangle$  das Wigner-Eckart Theorem anwenden,

$$\langle J'M_{J'} | T_{m_j}^{(j)}(k) | JM_J \rangle = (-)^{J'-M_{J'}} \begin{pmatrix} J' & j & J \\ -M_{J'} & m_j & M_J \end{pmatrix} \langle J' || T^{(j)}(k) || J \rangle. \quad (4.13)$$

Hierdurch kann die Abhängigkeit von den Projektionsquantenzahlen  $M_J$  und  $M_{J'}$  vom Matrixelement abgespalten werden.  $\langle J' || T^{(j)}(k) || J \rangle$  bezeichnet man als reduziertes Matrixelement. Aufgrund der Auswahlregel des in (4.13) auftretenden Wignerschen 3j Symbols tragen nur Multipoloperatoren mit dem Rang  $|J' - J| \leq j \leq J' + J$  zu dem Übergang bei. Zwischen Zuständen definierten Drehimpulses werden somit die unendlichen Summen in (4.6) und (4.7) endlich. In unserem konkreten Fall ist der Drehimpuls im Anfangs- und Endzustand  $\frac{1}{2}$ . Die Multipolentwicklung des Strommatrixelements (4.3) liefert unter Verwendung von (4.13),

$$\begin{aligned} \langle \Psi_{3\text{H}S3\text{H}} | \rho(\vec{k}, \alpha) | \Psi_{3\text{He}S3\text{He}} \rangle &= \sqrt{2\pi} \langle \Psi_{3\text{H}} | T_{\text{coul}}^{(0)}(k) | \Psi_{3\text{He}} \rangle \alpha_{s3\text{H}}^\dagger [1] \alpha_{s3\text{He}} \\ &+ i\sqrt{2\pi} \langle \Psi_{3\text{H}} | T_{\text{coul}}^{(1)}(k) | \Psi_{3\text{He}} \rangle \alpha_{s3\text{H}}^\dagger [\hat{k} \cdot \vec{\sigma}] \alpha_{s3\text{He}}, \end{aligned} \quad (4.14)$$

$$\begin{aligned} \langle \Psi_{3\text{H}S3\text{H}} | \vec{j}(\vec{k}, \alpha) | \Psi_{3\text{He}S3\text{He}} \rangle &= -\sqrt{2\pi} \langle \Psi_{3\text{H}} | T_{\text{long}}^{(0)}(k) | \Psi_{3\text{He}} \rangle \alpha_{s3\text{H}}^\dagger [\hat{k}] \alpha_{s3\text{He}} \\ &+ i\sqrt{\pi} \langle \Psi_{3\text{H}} | T_{\text{magn}}^{(1)}(k) | \Psi_{3\text{He}} \rangle \alpha_{s3\text{H}}^\dagger [i\hat{k} \times \vec{\sigma}] \alpha_{s3\text{He}} \\ &- i\sqrt{\pi} \langle \Psi_{3\text{H}} | T_{\text{elec}}^{(1)}(k) | \Psi_{3\text{He}} \rangle \alpha_{s3\text{H}}^\dagger [\vec{\sigma} - (\hat{k} \cdot \vec{\sigma})\hat{k}] \alpha_{s3\text{He}} \\ &- i\sqrt{2\pi} \langle \Psi_{3\text{H}} | T_{\text{long}}^{(1)}(k) | \Psi_{3\text{He}} \rangle \alpha_{s3\text{H}}^\dagger [(\hat{k} \cdot \vec{\sigma})\hat{k}] \alpha_{s3\text{He}}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

$\alpha_{s3\text{He}}$  und  $\alpha_{s3\text{H}}$  sind hierbei die zweidimensionalen Pauli-Spinoren von  $^3\text{He}$  und  $^3\text{H}$ .

Bei der Herleitung der Formeln (4.14) und (4.15) haben wir ausgenutzt, daß zwischen 3j-Symbolen und Pauli-Matrizen die folgenden Zusammenhänge bestehen,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ s_{3\text{He}} & -s_{3\text{H}} & 0 \end{pmatrix} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \alpha_{s_{3\text{H}}}^\dagger [\sigma_z] \alpha_{s_{3\text{He}}}, \\ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ s_{3\text{He}} & -s_{3\text{H}} & 0 \end{pmatrix} &= \frac{1}{\sqrt{6}} \alpha_{s_{3\text{H}}}^\dagger [1] \alpha_{s_{3\text{He}}}, \\ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ s_{3\text{He}} & -s_{3\text{H}} & \pm 1 \end{pmatrix} &= -\frac{1}{2\sqrt{3}} \alpha_{s_{3\text{H}}}^\dagger [\sigma_x \pm i\sigma_y] \alpha_{s_{3\text{He}}}. \end{aligned}$$

Wie in Kapitel 3 beschrieben wurde, setzt sich der schwache Stromoperator aus einem vektoriellen Anteil und einem axialen Anteil zusammen,

$$J^\mu(x) = J_V^\mu(x) + J_A^\mu(x). \quad (4.16)$$

Da die Wellenfunktionen von  $^3\text{He}$  und  $^3\text{H}$  positive Parität besitzen, können wir unter Ausnutzung von Paritätsinvarianz die Relationen (4.14) und (4.15) aufspalten,

$$\langle \Psi_{3\text{H}} s_{3\text{H}} | \rho_V(\vec{k}, \alpha) | \Psi_{3\text{He}} s_{3\text{He}} \rangle = \sqrt{2\pi} \langle \Psi_{3\text{H}} | | T_{\text{coul},V}^{(0)}(k) | | \Psi_{3\text{He}} \rangle \alpha_{s_{3\text{H}}}^\dagger [1] \alpha_{s_{3\text{He}}}, \quad (4.17)$$

$$\langle \Psi_{3\text{H}} s_{3\text{H}} | \rho_A(\vec{k}, \alpha) | \Psi_{3\text{He}} s_{3\text{He}} \rangle = i\sqrt{2\pi} \langle \Psi_{3\text{H}} | | T_{\text{coul},A}^{(1)}(k) | | \Psi_{3\text{He}} \rangle \alpha_{s_{3\text{H}}}^\dagger [\hat{k} \cdot \vec{\sigma}] \alpha_{s_{3\text{He}}}, \quad (4.18)$$

$$\begin{aligned} \langle \Psi_{3\text{H}} s_{3\text{H}} | \vec{j}_V(\vec{k}, \alpha) | \Psi_{3\text{He}} s_{3\text{He}} \rangle &= -\sqrt{2\pi} \langle \Psi_{3\text{H}} | | T_{\text{long},V}^{(0)}(k) | | \Psi_{3\text{He}} \rangle \alpha_{s_{3\text{H}}}^\dagger [\hat{k}] \alpha_{s_{3\text{He}}} \\ &+ i\sqrt{\pi} \langle \Psi_{3\text{H}} | | T_{\text{magn},V}^{(1)}(k) | | \Psi_{3\text{He}} \rangle \alpha_{s_{3\text{H}}}^\dagger [i\hat{k} \times \vec{\sigma}] \alpha_{s_{3\text{He}}}, \end{aligned} \quad (4.19)$$

$$\begin{aligned} \langle \Psi_{3\text{H}} s_{3\text{H}} | \vec{j}_A(\vec{k}, \alpha) | \Psi_{3\text{He}} s_{3\text{He}} \rangle &= -i\sqrt{2\pi} \langle \Psi_{3\text{H}} | | T_{\text{long},A}^{(1)}(k) | | \Psi_{3\text{He}} \rangle \alpha_{s_{3\text{H}}}^\dagger [(\hat{k} \cdot \vec{\sigma})\hat{k}] \alpha_{s_{3\text{He}}} \\ &- i\sqrt{\pi} \langle \Psi_{3\text{H}} | | T_{\text{elec},A}^{(1)}(k) | | \Psi_{3\text{He}} \rangle \alpha_{s_{3\text{H}}}^\dagger [\vec{\sigma} - (\hat{k} \cdot \vec{\sigma})\hat{k}] \alpha_{s_{3\text{He}}}. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Die Multipolmatrixelemente mit Index  $V$  sind mit vektoriellen Operatoren, die mit Index  $A$  mit axialen Operatoren gebildet.

## 4.2 Zusammenhang zwischen Formfaktoren und Multipolmatrixelementen

Um den Zusammenhang zwischen Formfaktoren und Multipolmatrixelementen herzustellen, müssen wir den Strom (2.10) auf eine mit (4.14) und (4.15) vergleichbare Form bringen. Hierzu werden die in (2.10) auftretenden vierdimensionalen Dirac-Spinoren  $u_s(\vec{p})$  durch zweidimensionale Pauli-Spinoren  $\alpha_s$  ausgedrückt. Mit Hilfe der in Anhang B aufgelisteten Formeln erhalten wir in einem kollinearen Bezugssystem ( $\vec{p}_{3\text{He}} = \frac{1}{2}(\alpha - 1)\vec{k}$ ),

$$\begin{aligned} & \langle \vec{p}_{3\text{H}} \Psi_{3\text{H}} S_{3\text{H}} | J^0(x=0) | \vec{p}_{3\text{He}} \Psi_{3\text{He}} S_{3\text{He}} \rangle \Big|_{\substack{\vec{p}_{3\text{He}} = \frac{1}{2}(\alpha-1)\vec{k} \\ \vec{p}_{3\text{H}} = \frac{1}{2}(\alpha+1)\vec{k}}} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} A(1+B) \\ & \alpha_{s_{3\text{H}}}^\dagger \left( (F_V + \frac{k_\mu^2}{4M^2} F_M)[1] + \frac{k_0}{k} (F_A + \frac{k_\mu^2}{4M^2} F_P)[\hat{k} \cdot \vec{\sigma}] \right) \alpha_{s_{3\text{He}}}, \end{aligned} \quad (4.21)$$

$$\begin{aligned} & \langle \vec{p}_{3\text{H}} \Psi_{3\text{H}} S_{3\text{H}} | \vec{J}(x=0) | \vec{p}_{3\text{He}} \Psi_{3\text{He}} S_{3\text{He}} \rangle \Big|_{\substack{\vec{p}_{3\text{He}} = \frac{1}{2}(\alpha-1)\vec{k} \\ \vec{p}_{3\text{H}} = \frac{1}{2}(\alpha+1)\vec{k}}} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} A(1+B) \\ & \alpha_{s_{3\text{H}}}^\dagger \left( \frac{k_0}{k} (F_V + \frac{k_\mu^2}{4M^2} F_M)[\hat{k}] + \frac{k_\mu^2}{2Mk} (F_V + F_M)[i\hat{k} \times \vec{\sigma}] \right. \\ & \quad \left. + \frac{(1-B)}{(1+B)} F_A[\vec{\sigma} - (\hat{k} \cdot \vec{\sigma})\hat{k}] + (F_A + \frac{k_\mu^2}{4M^2} F_P)[(\hat{k} \cdot \vec{\sigma})\hat{k}] \right) \alpha_{s_{3\text{He}}}, \end{aligned} \quad (4.22)$$

mit den kinematischen Größen

$$\begin{aligned} A &= \left( \frac{E_{3\text{He}} + M}{2E_{3\text{He}}} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{E_{3\text{H}} + M}{2E_{3\text{H}}} \right)^{\frac{1}{2}} \Big|_{\substack{\vec{p}_{3\text{He}} = \frac{1}{2}(\alpha-1)\vec{k} \\ \vec{p}_{3\text{H}} = \frac{1}{2}(\alpha+1)\vec{k}}} \\ B &= \frac{\frac{1}{4}(\alpha^2 - 1)\vec{k}^2}{(E_{3\text{He}} + M)(E_{3\text{H}} + M)} \Big|_{\substack{\vec{p}_{3\text{He}} = \frac{1}{2}(\alpha-1)\vec{k} \\ \vec{p}_{3\text{H}} = \frac{1}{2}(\alpha+1)\vec{k}}} \\ E_{3\text{He}} &= \left( M^2 + \vec{p}_{3\text{He}}^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \\ E_{3\text{H}} &= \left( M^2 + \vec{p}_{3\text{H}}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Die Umformungen (4.21) und (4.22) sind exakt durchgeführt worden und stellen keine nicht-relativistische Näherung dar.

Durch Vergleich von (4.21) und (4.22) mit (4.17) - (4.20) können wir unter Beachtung von (4.3) die folgenden Zusammenhänge zwischen Formfaktoren und Multipolmatrixelementen ablesen,

$$F_V + \frac{k_\mu^2}{4M^2} F_M = \frac{\sqrt{2\pi}}{A(1+B)} \langle \Psi_{3H} || T_{\text{coul},V}^{(0)}(k) || \Psi_{3He} \rangle, \quad (4.23)$$

$$\frac{k_0}{k} \left( F_V + \frac{k_\mu^2}{4M^2} F_M \right) = -\frac{\sqrt{2\pi}}{A(1+B)} \langle \Psi_{3H} || T_{\text{long},V}^{(0)}(k) || \Psi_{3He} \rangle, \quad (4.24)$$

$$F_V + F_M = \frac{i\sqrt{\pi}}{A(1+B)} \frac{\vec{k}^2}{k_\mu^2} \frac{2M}{|\vec{k}|} \langle \Psi_{3H} || T_{\text{magn},V}^{(1)}(k) || \Psi_{3He} \rangle, \quad (4.25)$$

$$\frac{k_0}{k} \left( F_A + \frac{k_\mu^2}{4M^2} F_P \right) = \frac{i\sqrt{2\pi}}{A(1+B)} \langle \Psi_{3H} || T_{\text{coul},A}^{(1)}(k) || \Psi_{3He} \rangle, \quad (4.26)$$

$$F_A = -\frac{i\sqrt{\pi}}{A(1-B)} \langle \Psi_{3H} || T_{\text{elec},A}^{(1)}(k) || \Psi_{3He} \rangle, \quad (4.27)$$

$$F_A + \frac{k_\mu^2}{4M^2} F_P = -\frac{i\sqrt{2\pi}}{A(1+B)} \langle \Psi_{3H} || T_{\text{long},A}^{(1)}(k) || \Psi_{3He} \rangle. \quad (4.28)$$

Zur praktischen Berechnung der Formfaktoren wählen wir das Breit-System, das durch den Bezugssystem-Parameter  $\alpha = 0$  definiert ist. Da im Breit-System  $k_0 = 0$  ist, können die Gleichungen (4.24) und (4.26) nicht zur Berechnung der Formfaktoren herangezogen werden. Die übrigen Gleichungen haben im Breit-System die folgende Gestalt,

$$F_V + \frac{k_\mu^2}{4M^2} F_M = \sqrt{2\pi} \frac{E}{M} \langle \Psi_{3H} || T_{\text{coul},V}^{(0)}(k) || \Psi_{3He} \rangle, \quad (4.29)$$

$$F_V + F_M = -i\sqrt{\pi} \frac{E}{M} \frac{2M}{k} \langle \Psi_{3H} || T_{\text{magn},V}^{(1)}(k) || \Psi_{3He} \rangle, \quad (4.30)$$

$$F_A = -i\sqrt{\pi} \langle \Psi_{3H} || T_{\text{elec},A}^{(1)}(k) || \Psi_{3He} \rangle, \quad (4.31)$$

$$F_A + \frac{k_\mu^2}{4M^2} F_P = -i\sqrt{2\pi} \frac{E}{M} \langle \Psi_{3H} || T_{\text{long},A}^{(1)}(k) || \Psi_{3He} \rangle, \quad (4.32)$$

mit  $E = (M^2 + \frac{1}{4}\vec{k}^2)^{\frac{1}{2}}$  und  $\vec{k}^2 = -k_\mu^2$ . Mit Hilfe dieser Gleichungen sind in dieser Arbeit die vier schwachen Formfaktoren berechnet worden.

## 4.3 Berechnung der Multipolmatrixelemente für Ein- und Zweikörper-Ströme

### 4.3.1 Vorbereitende Bemerkungen

Im vorherigen Abschnitt sind die Formfaktoren des nuklearen Stroms durch die reduzierten Multipolmatrixelemente (RME) des schwachen Stromoperators zwischen den Wellenfunktionen von  $^3\text{He}$  und  $^3\text{H}$  ausgedrückt worden. In diesem Abschnitt soll nun der Formalismus beschrieben werden, mit dem sich diese RME für die in Anhang C angegebenen Ein- und Zweikörper-Stromoperatoren berechnen lassen. Bevor wir diesen Formalismus ausführlich beschreiben, wollen wir zunächst deutlich machen, warum eine direkte Berechnung dieser Matrixelemente auf Schwierigkeiten führen würde.

In Kapitel 3 haben wir gesehen, daß die Wellenfunktionen in einer Partialwellenbasis vorliegen, die Stromoperatoren jedoch als Matrixelemente zwischen ebenen Wellen gegeben sind. Um diese beiden Bausteine zum RME zusammenzufügen, sind sie in der gleichen Basis darzustellen. Hierzu muß man entweder den Stromoperator in Partialwellen oder die Wellenfunktionen in ebenen Wellen darstellen. Da die Wellenfunktionen nur numerisch gegeben sind, entscheiden wir uns für die erste Variante. Um das Partialwellenmatrixelement eines in der Form  $\langle \vec{p}' | A | \vec{p} \rangle$  gegebenen Operators  $A$  zu berechnen, ist im allgemeinen eine vierfache numerische Winkelintegration auszuführen,

$$\langle p' L' M_{L'} | A | p L M_L \rangle = \int d^2 \hat{p}' \int d^2 \hat{p} Y_{M_L}^{(L)*}(\hat{p}') Y_{M_L}^{(L)}(\hat{p}) \langle \vec{p}' | A | \vec{p} \rangle.$$

In unserem konkreten Fall liegen zwei Impulse  $\vec{p}$  und  $\vec{q}$  vor, so daß sich die Zahl der Winkelintegrationen auf 8 erhöhen würde. Dies ist aus zwei Gründen von großem Nachteil. Zum einen ist eine derart hochdimensionale numerische Integration sehr zeitintensiv, zum anderen wäre die numerische Ungenauigkeit beträchtlich.

In dem in dieser Arbeit entwickelten Formalismus ist daher versucht worden, möglichst viele dieser Winkelintegrationen analytisch auszuführen. Ausgehend von allgemeinen Operatorstrukturen von Ein- und Zweikörper-Natur, sind Formeln für die RME hergeleitet worden, die für eine numerische Behandlung besser geeignet sind. Um die folgenden Formeln in kompakter Form darstellen zu können, fassen wir den Operator der Ladungsdichte und die Komponenten des Operators der räumlichen Stromdichte in dem Symbol

$$T_{\lambda}^{(a)}(\vec{k}) = \begin{cases} J^0(\vec{k}) & \text{für } a = 0 \quad \lambda = 0 \\ J^3(\vec{k}) & \text{für } a = 1 \quad \lambda = 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}(J^1(\vec{k}) + iJ^2(\vec{k})) & \text{für } a = 1 \quad \lambda = 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(J^1(\vec{k}) - iJ^2(\vec{k})) & \text{für } a = 1 \quad \lambda = -1 \end{cases} \quad (4.33)$$

zusammen. Für den in einem kollinearen Bezugssystem definierten “effektiven”

Stromoperator (4.5)  $j^\mu(\vec{k}, \alpha)$  definieren wir auf entsprechende Weise die Größe

$$t_\lambda^{(a)}(\vec{k}, \alpha) = \begin{cases} \rho(\vec{k}, \alpha) & \text{für } a = 0 \quad \lambda = 0 \\ j^3(\vec{k}, \alpha) & \text{für } a = 1 \quad \lambda = 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}(j^1(\vec{k}, \alpha) + ij^2(\vec{k}, \alpha)) & \text{für } a = 1 \quad \lambda = 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(j^1(\vec{k}, \alpha) - ij^2(\vec{k}, \alpha)) & \text{für } a = 1 \quad \lambda = -1 \end{cases}, \quad (4.34)$$

welche mit dem “vollen” Stromoperator  $T_\lambda^{(a)}(\vec{k})$  über die Relation

$$\langle \vec{P}' \vec{p}' \vec{q}' | T_\lambda^{(a)}(\vec{k}) | \vec{P} \vec{p} \vec{q} \rangle = \delta(\vec{P}' - \vec{P} - \vec{k}) \langle \vec{p}' \vec{q}' | t_\lambda^{(a)}(\vec{k}, \alpha) | \vec{p} \vec{q} \rangle \quad (4.35)$$

verknüpft ist. Der verallgemeinerte Multipoloperator

$$T_{m_j}^{([Ia]j)}(k, \alpha) = \frac{(-i)^j}{4\pi} \int d^2\hat{k} \left\{ Y^{(I)}(\hat{k}) \otimes t^{(a)}(\vec{k}, \alpha) \right\}_{m_j}^{(j)} \quad (4.36)$$

umfaßt jetzt sowohl die Coulomb-Multipoloperatoren ( $a = 0$ ) als auch die Multipoloperatoren des räumlichen Stroms ( $a = 1$ ). Die im folgenden zu berechnende Basisgröße ist das RME  $\langle \Psi_B | T^{([Ia]j)}(k) | \Psi_B \rangle$ , welches wir im folgenden auch als reduziertes Matrixelement im Isospinraum auffassen wollen. Wie in (3.6) beschrieben wurde, sind die Wellenfunktionen von  ${}^3\text{He}$  und  ${}^3\text{H}$  verschiedene Isospin-Projektionen des Zustandes  $|\Psi_B\rangle$ . Unter Ausnutzung der Vollständigkeit der Partialwellen-Basiszustände  $|pq\nu\rangle = |pq[(Ll)\mathcal{L}(Ss)\mathcal{S}]JM_J; (Tt)\mathcal{T}M_T\rangle$  läßt sich das RME schreiben als,

$$\langle \Psi_B | T^{([Ia]j)}(k) | \Psi_B \rangle = \sum_\nu \int_0^\infty p^2 dp \int_0^\infty q^2 dq \langle \Psi_B | pq\nu \rangle \langle pq\nu | T^{([Ia]j)}(k) | \Psi_B \rangle. \quad (4.37)$$

Im Hinblick auf spätere Anwendungen soll zunächst das RME

$$\langle pq\nu | T^{([Ia]j)}(k) | \Psi_B \rangle = \langle pq[(Ll)\mathcal{L}(Ss)\mathcal{S}]J; (Tt)\mathcal{T} | T^{([Ia]j)}(k) | \Psi_B \rangle \quad (4.38)$$

berechnet werden. Diese Größe kann in dieser Form auch zur Beschreibung von Aufbruchreaktionen am gebundenen Dreinukleonen-System verwendet werden. In Anhang C sind die Einkörper-Stromoperatoren von Teilchen 1 und die Zweikörper-Stromoperatoren von Paar 23 in der folgenden Form gegeben,

$$\langle \vec{p}_1' | T_\lambda^{(a)}(1, \vec{k}) | \vec{p}_1 \rangle = \delta^{(3)}(\vec{q}_1 - \vec{k}) T_\lambda^{(a)}(1, \vec{k}, \vec{Q}_1)_1, \quad (4.39)$$

$$\langle \vec{p}_2' \vec{p}_3' | T_\lambda^{(a)}(2, \vec{k})_{23} | \vec{p}_2 \vec{p}_3 \rangle = \delta^{(3)}(\vec{q}_2 + \vec{q}_3 - \vec{k}) T_\lambda^{(a)}(2, \vec{k}, \vec{q}_2, \vec{q}_3, \vec{Q}_2, \vec{Q}_3)_{23}, \quad (4.40)$$

wobei  $\vec{q}_i = \vec{p}_i' - \vec{p}_i$  und  $\vec{Q}_i = \vec{p}_i' + \vec{p}_i$  die Differenzen und Summen der Einteilchen-Impulse  $\vec{p}_i'$  und  $\vec{p}_i$  sind. Da die von uns verwendeten Wellenfunktionen antisymmetrisch unter Teilchenvertauschung sind, genügt es, sich auf die explizite Berechnung des Einkörper-Beitrages von Teilchen 1 und des Zweikörper-Beitrages von Paar 23 zu beschränken. Den Gesamtbeitrag erhält man dann einfach durch Multiplikation dieser Einzelbeiträge mit einem Faktor 3.



### 4.3.2 Tensorzerlegung von Ein- und Zweikörper-Strömen

Die  $\delta$ -funktions-freien Matrixelemente der Operatoren (4.39) und (4.40) lassen sich, nachdem sie durch Jacobi-Impulse ausgedrückt worden sind, wie folgt zerlegen,

$$\begin{aligned}
 & T_{\lambda}^{(a)}(1, \vec{k}, \vec{Q}_1)_1 \Big|_{\vec{Q}_1 = -\vec{q}_+ + \frac{a}{3}\vec{k}} \\
 &= \frac{k_0^{pwk_0}}{m^{pwm} m_{\Delta}^{pwm_{\Delta}}} f_{ft}(k_{\mu}^2) t_1^{(f)}(it) \\
 & \sum_{i=1}^{nts} C_i k^{pwk_i} q_+^{pwq_i} (4\pi)^2 \left\{ Y^{(b_i)}(\hat{k}) \otimes [\mathcal{O}^{(c_i)}(0, 0, 0, c_i) \otimes s_1^{(d_i)}(st_i)]^{(e_i)} \right\}_{\lambda}^{(a)}, \quad (4.41)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & T_{\lambda}^{(a)}(2, \vec{k}, \vec{q}_2, \vec{q}_3, \vec{Q}_2, \vec{Q}_3)_{23} \Big|_{\substack{\vec{q}_{2,3} = \frac{\vec{k}}{2} \pm \vec{p}_{-} \\ \vec{Q}_{2,3} = \pm \vec{p}_{+} + \frac{\vec{q}_{+}}{2} + \frac{a}{3}\vec{k}}} \\
 &= \frac{k_0^{pwk_0}}{m^{pwm} m_{\Delta}^{pwm_{\Delta}}} f_{ft}(k_{\mu}^2) T_{23}^{(f)}(it) F_{B_1, B_2}^{iex}(k, p_-, v_p) \\
 & \sum_{i=1}^{nts} C_i k^{pwk_i} p_+^{pwp+i} p_-^{pwp-i} q_+^{pwq_i} \\
 & (4\pi)^2 \left\{ Y^{(b_i)}(\hat{k}) \otimes [\mathcal{O}^{(c_i)}(c_{p+i}, c_{p-i}, c_{p_i}, c_{q_i}) \otimes S_{23}^{(d_i)}(st_i)]^{(e_i)} \right\}_{\lambda}^{(a)}, \quad (4.42)
 \end{aligned}$$

wobei die Vektoren  $\vec{p}_{\pm} = \vec{p}' \pm \vec{p}$  und  $\vec{q}_{\pm} = \vec{q}' + \vec{q}$  sowie der orbitale Operator

$$\mathcal{O}_{m_{c_i}}^{(c_i)}(c_{p+i}, c_{p-i}, c_{p_i}, c_{q_i}) = \left\{ \left( Y^{(c_{p+i})}(\hat{p}_{+}) \otimes Y^{(c_{p-i})}(\hat{p}_{-}) \right)^{(c_{p_i})} \otimes Y^{(c_{q_i})}(\hat{q}_{+}) \right\}_{m_{c_i}}^{(c_i)}$$

eingeführt worden sind.  $s_1^{(d)}(st)$  und  $S_{23}^{(d)}(st)$  sind die Spin-Anteile der Operatoren, die durch ihren Rang  $d$  und ihren Typ  $st$  charakterisiert sind. Analog klassifizieren wir die Isospin-Anteile  $t_1^{(f)}(it)$  und  $T_{23}^{(f)}(it)$  durch  $f$  und  $it$ .  $f_{ft}(k_{\mu}^2)$  ist der phänomenologisch eingeführte Formfaktor. Die verschiedenen auftretenden Spin-, Isospin- und Formfaktor-Typen, die an dieser Stelle mit  $st$ ,  $it$  und  $ft$  bezeichnet sind, sind in Anhang C.3 katalogisiert. Ein Einkörper-Strom wird vollständig klassifiziert durch die 3 Potenzen  $pwk_0$ ,  $pwm$  und  $pwm_{\Delta}$ , den Formfaktor-Typ  $ft$ , den Isospin-Rang  $f$  und Isospin-Typ  $it$ , den totalen Rang  $a$  sowie die Anzahl der Tensorstrukturen  $nts$ . Jede Tensorstruktur  $i$  wird ihrerseits beschrieben durch die Konstante  $C_i$ , die beiden Potenzen  $pwk_i$ ,  $pwq_i$ , die 4 Ränge  $b_i$ ,  $c_i$ ,  $d_i$  und  $e_i$  und den Spin-Typ  $st_i$ . Um die vollständige Information über einen Einkörper-Strom abzuspeichern, benötigt man also  $8 + nts * 8$  Zahlen.

Der Zweikörper-Strom unterscheidet sich vom Einkörper-Strom im wesentlichen durch das Auftreten der Propagator-Funktion

$$F_{B_1, B_2}^{iex}(k, p_-, v_p) = F_{B_1, B_2}^{iex}(\vec{q}_2^2, \vec{q}_3^2) \Big|_{\vec{q}_{2,3} = \frac{\vec{k}}{2} \pm \vec{p}_-} \quad \text{mit } v_p = \hat{k} \cdot \hat{p}_-,$$

die den Austausch von Mesonen beschreibt. Sie wird charakterisiert durch den MEC-Typ *iex* sowie die auftretenden Mesonen  $B_1$  und  $B_2$ . Die verschiedenen Propagator-Funktionen, die in den von uns verwendeten Operatoren auftreten, sind in Anhang C.3 aufgelistet.

Darüberhinaus besitzt der Zweikörper-Strom eine kompliziertere Struktur, da er im Vergleich zum Einkörper-Strom von den zusätzlichen Vektoren  $\vec{p}_+$  und  $\vec{p}_-$  abhängt. Zur vollständigen Beschreibung der Tensorstruktur *i* werden daher zusätzlich die beiden Impuls-Potenzen  $pwp_{+i}$  und  $pwp_{-i}$  sowie die 4 Tensor-Ränge  $c_{p_{+i}}$ ,  $c_{p_{-i}}$ ,  $c_{p_i}$  und  $c_{q_i}$  benötigt. Um die vollständige Information über einen Zweikörper-Strom zu speichern, benötigt man somit  $11 + nts * 14$  Zahlen. Der Formalismus der Operator-Zerlegung ist auf den folgenden beiden Seiten anhand von 2 Beispielen illustriert.

## Beispiel 1 : Spin-Orbit-Korrektur zur elektromagnetischen Ladungsdichte

Als Beispiel für einen Einkörper-Stromoperator wählen wir den isoskalaren Spin-Orbit-Term (C.4), der eine relativistische Korrektur zur elektromagnetischen Ladungsdichte darstellt,

$$\rho_{em}^{(2)}(1, \vec{k}, \vec{Q}_1)_1 = -\frac{1}{16m^2} \left( f_1^{IS}(k_\mu^2) + 2f_2^{IS}(k_\mu^2) \right) (i\vec{\sigma}_1 \times \vec{Q}_1) \cdot \vec{k}.$$

Wir ersetzen  $\vec{Q}_1 = -\vec{q}_+ + \frac{\alpha}{3}\vec{k}$  und benutzen die Formeln aus Anhang A, um die folgenden Umformungen durchzuführen,

$$\begin{aligned} (i\vec{\sigma}_1 \times \vec{Q}_1) \cdot \vec{k} &= \vec{k} \cdot (i\vec{q}_+ \times \vec{\sigma}_1) \\ &= -\sqrt{3}\sqrt{2}\frac{4\pi}{3} k q_+ \left\{ Y^{(1)}(\hat{k}) \otimes \left( Y^{(1)}(\hat{q}_+) \otimes \sigma_1^{(1)} \right)^{(1)} \right\}^{(0)} \\ &= -\sqrt{\frac{2}{3}} k q_+ \left\{ Y^{(1)}(\hat{k}) \otimes \left( O^{(1)}(0, 0, 0, 1) \otimes \sigma_1^{(1)} \right)^{(1)} \right\}^{(0)} \end{aligned}$$

Mit Hilfe dieser Formel und mit Hilfe der Tabellen aus Anhang C.3 können wir nun die gesamte Operator-Information in die folgende Tabelle eintragen:

## Information über den Operator

$a$	$ft$	$f$	$it$	$pwk_0$	$pwm$	$pwm_\Delta$	$nts$
0	30	0	1	0	2	0	1

## Information über die Tensorstruktur

Tensorstruktur	Ränge					Potenzen		Konstante $C$
	$b$	$c$	$d$	$st$	$e$	$pwk$	$pwq_+$	
1	1	1	1	2	1	1	1	$\frac{1}{16}\sqrt{\frac{2}{3}}$



### 4.3.3 Master-Formeln für die reduzierten Multipolmatrixelemente (RME) von Ein- und Zweikörper-Strömen

Ausgehend von den verallgemeinerten Operatorstrukturen (4.41) und (4.42) sind im Anhang D die Formeln für die RME (4.38) von Ein- und Zweikörper-Strömen hergeleitet worden. Die recht aufwendige Herleitung ergibt für den Einkörper-Strom (4.41) die Master-Formel,

$$\begin{aligned}
& \langle p'q'[(L'l')\mathcal{L}'(S's')\mathcal{S}']J'; (T't')\mathcal{T}' || T^{([Ia]j)}(1, k)_1 || \Psi_B \rangle \\
&= (-i)^j \frac{1}{(4\pi)^{\frac{1}{2}}} \frac{k_0^{pwk_0}}{m^{pwm} m_{\Delta}^{pwm_{\Delta}}} f_{ft}(k_{\mu}^2) \sum_{\nu=\{Ll\mathcal{L}SsSTt\}} \delta_{L'L} \delta_{S'S} \delta_{T'T} \\
& \quad \langle (T't')\mathcal{T}' || t_1^{(f)}(it) || (Tt)\frac{1}{2} \rangle \sum_{i=1}^{nts} C_i k^{pwk_i} \langle (S's')\mathcal{S}' || s_1^{(d_i)}(st_i) || (Ss)\mathcal{S} \rangle \\
& \quad \sum_{\kappa} RK(a, b_i, e_i, j, I; \kappa) \sum_{\sigma} RS(c_i, d_i, e_i, j; \mathcal{L}', \mathcal{S}', J', \mathcal{L}, \mathcal{S}, \frac{1}{2}; \kappa, \sigma) \\
& \quad (-)^{c_i+\mathcal{L}'+L+l} \hat{\mathcal{L}}' \hat{\mathcal{L}} \left\{ \begin{matrix} l' & l & \sigma \\ \mathcal{L} & \mathcal{L}' & L \end{matrix} \right\} I_{\Lambda=-\frac{2}{3}}(p', q', k; l', l, \nu; c_i, \kappa, \sigma; pwq_i).
\end{aligned} \tag{4.43}$$

Die entsprechende Formel für das RME des allgemeinen Zweikörper-Stroms (4.42) lautet,

$$\begin{aligned}
& \langle p'q'[(L'l')\mathcal{L}'(S's')\mathcal{S}']J'; (T't')\mathcal{T}' || T^{([Ia]j)}(2, k)_{23} || \Psi_B \rangle \\
&= (-i)^j (4\pi)^{\frac{1}{2}} \frac{k_0^{pwk_0}}{m^{pwm} m_{\Delta}^{pwm_{\Delta}}} f_{ft}(k_{\mu}^2) \sum_{\nu=\{Ll\mathcal{L}SsSTt\}} \delta_{s's} \delta_{t't} \\
& \quad \langle (T't')\mathcal{T}' || T_{23}^{(f)}(it) || (Tt)\frac{1}{2} \rangle \sum_{i=1}^{nts} C_i k^{pwk_i} \langle (S's')\mathcal{S}' || S_{23}^{(d_i)}(st_i) || (Ss)\mathcal{S} \rangle \\
& \quad \sum_{\kappa} RK(a, b_i, e_i, j, I; \kappa) \sum_{\sigma} RS(c_i, d_i, e_i, j; \mathcal{L}', \mathcal{S}', J', \mathcal{L}, \mathcal{S}, \frac{1}{2}; \kappa, \sigma) \\
& \quad \sum_{\gamma_p \varphi_p \gamma_q \varphi_q} (-)^{c_i+\sigma} \hat{\gamma}_p \hat{\varphi}_p \hat{\gamma}_q \hat{\varphi}_q \hat{c}_i \hat{\kappa} \hat{\sigma} \hat{\mathcal{L}}' \hat{\mathcal{L}} \left( \begin{matrix} \varphi_p & \varphi_q & \kappa \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \right) \\
& \quad \left\{ \begin{matrix} c_{p_i} & c_{q_i} & c_i \\ \varphi_p & \varphi_q & \kappa \\ \gamma_p & \gamma_q & \sigma \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} L' & L & \gamma_p \\ l' & l & \gamma_q \\ \mathcal{L}' & \mathcal{L} & \sigma \end{matrix} \right\} \sum_{\rho} RK(c_{p_i}, c_{p-i}, c_{p+i}, \gamma_p, \varphi_p; \rho) \\
& \quad \int_0^{\infty} p^2 dp \left[ \langle p'L' || P^{(\gamma_p)}(c_{p+i}, \rho, \varphi_p; pwp_{+i}, pwp_{-i}; iex, B_1, B_2) || pL \rangle \right. \\
& \quad \left. I_{\Lambda=\frac{1}{3}}(p, q', k; l', l, \nu; c_{q_i}, \varphi_q, \gamma_q; pwq_i) \right].
\end{aligned} \tag{4.44}$$

In beiden Formeln treten die folgendermaßen definierten  $q$ -Integrale auf,

$$\begin{aligned}
& I_{\Lambda}(p', q', k; l', l, \nu; c_q, \varphi_q, \gamma_q; pwq) \\
&= \frac{1}{(|\Lambda|k)^{\varphi_q}} \sum_{\delta=0}^{c_q+\varphi_q} \sum_{\rho_q} C(c_q, \varphi_q, \gamma_q; l', l; \delta, \rho_q) q'^{c_q+\varphi_q-\delta-1} \\
& \frac{1}{2|\Lambda|k} \int_{|q'-|\Lambda|k|}^{q'+|\Lambda|k} dq \left[ q^{\delta+1} q_+^{pwq-c_q} P_{\rho_q}(\bar{u}_q) \langle p' q \nu | \Psi_B \rangle \right] \quad (4.45)
\end{aligned}$$

mit  $\bar{u}_q = \frac{q^2+q'^2-\Lambda^2 k^2}{2qq'}$  und  $q_+ = (2(q^2+q'^2)-\Lambda^2 k^2)^{\frac{1}{2}}$ . In der Formel für Zweikörper-Ströme treten zusätzlich noch die folgenden Winkelintegrale auf,

$$\begin{aligned}
& \langle p' L' | P^{(\gamma_p)}(c_{p_+}, \rho, \varphi_p; pwp_+, pwp_-; iex, B_1, B_2) | pL \rangle \\
&= \sum_{\delta=0}^{c_{p_+}+\rho} \sum_{\rho_p} C(c_{p_+}, \rho, \gamma_p, L', L, \delta, \rho_p) p'^{c_{p_+}+\rho-\delta} p^{\delta} \\
& \frac{1}{2} \int_{-1}^1 du_p P_{\rho_p}(u_p) p_+^{pwp_+-c_{p_+}} p_-^{pwp_--\rho} \frac{1}{2} \int_{-1}^1 dv_p P_{\varphi_p}(v_p) F_{B_1, B_2}^{iex}(k, p_-, v_p) \quad (4.46)
\end{aligned}$$

mit  $p_{\pm} = (p^2 + p'^2 \pm 2pp'u_p)^{\frac{1}{2}}$ . Die in diesen Formeln auftretenden geometrischen Funktionen  $C(...)$ ,  $RK(...)$  und  $RS(...)$  sind der Übersichtlichkeit halber erst am Ende dieses Kapitels aufgelistet.

Wir erkennen, daß die Zahl der Winkelintegrationen drastisch reduziert werden konnte. Für die Einkörper-Ströme konnten alle Winkelintegrationen analytisch ausgeführt werden, bei den Zweikörper-Ströme sind lediglich zwei Winkelintegrationen übrig geblieben, was verglichen mit den anfänglich erwähnten 8 Winkelintegrationen wenig ist. Diese Winkelintegrale konnten unter Ausnutzung der Eigenschaften der Kugelflächenfunktionen in eine recht große Anzahl von Summationen über geometrische Koeffizienten umgewandelt werden. Vom numerischen Standpunkt aus sind diese geometrischen Koeffizienten viel angenehmer, da sie exakt berechnet werden können.

Die Master-Formeln (4.43) und (4.44) sind programmiert worden. Um den Beitrag eines Operators zu berechnen, muß dieser nur noch nach dem beschriebenen Verfahren zerlegt werden. Die in den Operortabellen enthaltene Information dient dann als Input für die von uns entwickelten Programme, an denen selber keine Veränderungen mehr vorzunehmen sind. Hierin liegt ein weiterer großer Vorteil unserer Vorgehensweise. Dadurch, daß nicht für jeden Operator wieder eine neue Formel und ein neues Programm entwickelt werden muß, kann der Arbeitsaufwand und die Fehleranfälligkeit beträchtlich reduziert werden, was in Anbetracht der Vielzahl von Operatoren sehr wichtig ist.

### Auflistung der geometrischen Funktionen

Die in (4.45) und (4.46) auftretende geometrische Funktion  $C(\dots)$  ist wie folgt definiert,

$$\begin{aligned}
 C(c_{p+}, \rho, \gamma_p, L', L, \delta, \rho_p) \\
 = \sum_{\tilde{\delta}=\tilde{\delta}_{min}}^{\tilde{\delta}_{max}} \sum_{\alpha_{p1} \alpha_{p2}} RP(c_{p+}, \rho, \gamma_p, \delta_{p1} = \frac{1}{2}(\delta + \tilde{\delta}), \delta_{p2} = \frac{1}{2}(\delta - \tilde{\delta}), \alpha_{p1}, \alpha_{p2}) \\
 RF(L', L, \alpha_{p1}, \alpha_{p2}, \gamma_p; \rho_p).
 \end{aligned} \tag{4.47}$$

Sie enthält die geometrischen Umkopplungsfunktionen  $RP(\dots)$  und  $RF(\dots)$ , die wir jetzt zusammen mit den in (4.43) und (4.44) auftretenden  $RK(\dots)$  und  $RS(\dots)$  auflisten,

$$\begin{aligned}
 RK(a, b, e, j, I; \kappa) \\
 = (-)^{b+e+j+I+\kappa} \hat{a} \hat{b} \hat{I} \hat{\kappa} \begin{pmatrix} I & b & \kappa \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} b & e & a \\ j & I & \kappa \end{Bmatrix},
 \end{aligned} \tag{4.48}$$

$$\begin{aligned}
 RS(c, d, e, j; \mathcal{L}', \mathcal{S}', J', \mathcal{L}, \mathcal{S}, J; \kappa, \sigma) \\
 = (-)^{\kappa+c+d+j} \hat{J}' \hat{J} \hat{j} \hat{e} \hat{\sigma} \begin{Bmatrix} c & d & e \\ j & \kappa & \sigma \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathcal{L}' & \mathcal{L} & \sigma \\ \mathcal{S}' & \mathcal{S} & d \\ J' & J & j \end{Bmatrix},
 \end{aligned} \tag{4.49}$$

$$\begin{aligned}
 RP(c_{p+}, c_{p-}, c_p, \delta_{p1}, \delta_{p2}, \alpha_{p1}, \alpha_{p2}) \\
 = (-)^{\delta_{p2}+\alpha_{p1}+\alpha_{p2}} \hat{c}_{p+} \hat{c}_{p-} \hat{\alpha}_{p1} \hat{\alpha}_{p2} (\widehat{c_{p+} - \delta_{p1}}) (\widehat{c_{p-} - \delta_{p2}}) \begin{pmatrix} 2c_{p+} + 1 \\ 2\delta_{p1} \end{pmatrix}^{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 2c_{p-} + 1 \\ 2\delta_{p2} \end{pmatrix}^{\frac{1}{2}} \\
 \begin{pmatrix} c_{p+} - \delta_{p1} & c_{p-} - \delta_{p2} & \alpha_{p1} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_{p1} & \delta_{p2} & \alpha_{p2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} c_{p+} - \delta_{p1} & \delta_{p1} & c_{p+} \\ c_{p-} - \delta_{p2} & \delta_{p2} & c_{p-} \\ \alpha_{p1} & \alpha_{p2} & c_p \end{Bmatrix},
 \end{aligned} \tag{4.50}$$

$$\begin{aligned}
 RF(L', L, \alpha_1, \alpha_2, \gamma_p; \rho_p) \\
 = (-)^{\alpha_2+\gamma_p} \hat{L}' \hat{L} \hat{\alpha}_1 \hat{\alpha}_2 \hat{\gamma}_p \hat{\rho}_p^2 \begin{pmatrix} \rho_p & \alpha_1 & L' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_p & \alpha_2 & L \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \gamma_p \\ L & L' & \rho_p \end{Bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{4.51}$$

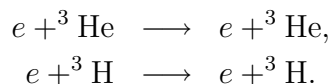




# Kapitel 5

## Exkurs: Elastische Elektronenstreuung

Der von uns in Kapitel 4 entwickelte Formalismus beschränkt sich nicht nur auf die Beschreibung schwacher Reaktionen, sondern kann auch zur Beschreibung elektromagnetischer (e.m.) Reaktionen benutzt werden. Dabei ist formal lediglich der schwache Stromoperator  $J^\mu(\vec{k})$  durch den e.m. Stromoperator  $J_{em}^\mu(\vec{k})$  zu ersetzen. Als erste praktische Anwendung präsentieren wir daher in diesem Kapitel Resultate für die elastischen Elektronenstreureaktionen



Diese e.m. Reaktionen sind für uns aus mehreren Gründen interessant. Zum einen können wir durch Vergleich mit älteren Resultaten aus der Kerntheoriegruppe Hannover [45, 22, 40] prüfen, ob unser Formalismus und unsere numerische Berechnung technisch korrekt sind. Zum andern erscheint es hinsichtlich des kürzlich wiederaufkeimenden theoretischen und experimentellen Interesses an diesen Reaktionen [37, 30] sinnvoll, die zitierten älteren Arbeiten zu aktualisieren und zu erweitern. Darüberhinaus steht die elastische Elektronenstreuung am gebundenen Dreinukleonen-System mit der “elastischen” Myon-Einfang-Reaktion  $\mu + {}^3\text{He} \longrightarrow \nu_\mu + {}^3\text{H}$  aufgrund der CVC Relation (siehe Kapitel 6.1) in engem Zusammenhang und bietet die Möglichkeit, den Vektoranteil des schwachen Stroms separat zu testen.

In Abschnitt 5.1 stellen wir die wichtigsten Formeln zur elastischen Elektronenstreuung zusammen. Die Formeln für die Streuquerschnitte der obigen Reaktionen enthalten als unbekannte Größen die e.m. Formfaktoren von  ${}^3\text{He}$  und  ${}^3\text{H}$ , die experimentell über einen weiten Bereich des Impulsübertrages vermessen wurden. In Abschnitt 5.2 vergleichen wir unsere theoretischen Resultate mit den vorhandenen experimentellen Daten.

## 5.1 Streuquerschnitt und elektromagnetischer nuklearer Strom

Die e.m. Wechselwirkung wird beschrieben durch die Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L}(x) = e (j_{em}^\mu(x) + J_{em}^\mu(x)) A_\mu(x). \quad (5.1)$$

Hierbei ist  $A_\mu(x)$  der Operator des e.m. Feldes und  $e$  die Elementarladung.  $j_{em}^\mu(x)$  und  $J_{em}^\mu(x)$  sind die Operatoren des leptonischen und hadronischen Stroms. Für die elastischen Streureaktionen

$$\begin{aligned} e + {}^3\text{He} &\longrightarrow e + {}^3\text{He}, \\ e + {}^3\text{H} &\longrightarrow e + {}^3\text{H}, \end{aligned}$$

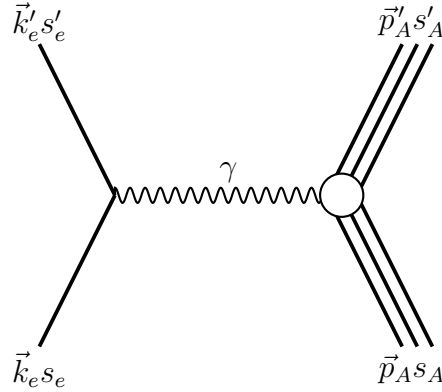
ergibt sich in der Einphoton-Näherung im Laborsystem der Streuquerschnitt

$$\frac{d\sigma(E_e, \theta_e)}{d\Omega} = (2\pi)^{10} \frac{E_e^2}{\left(1 + \frac{2E_e}{M} \sin^2 \frac{\theta_e}{2}\right)^3} \frac{(M^2 + \vec{p}_A'^2)^{\frac{1}{2}}}{M} \frac{1}{4} \sum_{s_e s_e' s_A s_A'} |\langle f|T|i\rangle|^2 \quad (5.2)$$

mit dem T-Matrix-Element

$$\langle f|T|i\rangle = \frac{e^2}{k_\mu^2} \langle \vec{k}_e' s_e' | j_{em, \mu}(x=0) | \vec{k}_e s_e \rangle \langle \vec{p}_A' \Psi_{A s_A'} | J_{em}^\mu(x=0) | \vec{p}_A \Psi_{A s_A} \rangle \quad (5.3)$$

und  $A = \{{}^3\text{He}, {}^3\text{H}\}$ . Die in diesen Formeln auftretenden Größen sind in Abbildung 5.1 graphisch dargestellt. Der Streuquerschnitt ist eine Funktion der Elektroneneinschußenergie  $E_e \approx |\vec{k}_e|$  und des Streuwinkels  $\theta_e$ .



**Abbildung 5.1:** Diagrammatische Darstellung der elastischen Elektronenstreuung in der Einphoton-Näherung.

Der e.m. Strom des Elektrons hat die aus der Quantenelektrodynamik bekannte Form

$$\langle \vec{k}'_e s'_e | j_{em}^\mu(x=0) | \vec{k}_e s_e \rangle = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{(4E_e E_{e'})^{\frac{1}{2}}} \bar{u}_{s_{e'}}(\vec{k}'_e) \gamma^\mu u_{s_e}(\vec{k}_e). \quad (5.4)$$

Der e.m. Strom des Kerns ist nicht aus einer fundamentalen Theorie bekannt und kann zunächst nur parametrisiert werden,

$$\langle \vec{p}'_A \Psi_{A s'_A} | J_{em}^\mu(x=0) | \vec{p}_A \Psi_{A s_A} \rangle = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{(4E_A E_{A'})^{\frac{1}{2}}} \bar{u}_{s_{A'}}(\vec{p}'_A) \Gamma_{em}^\mu u_{s_A}(\vec{p}_A)$$

mit

$$\Gamma_{em}^\mu = F_1^A(k_\mu^2) \gamma^\mu + F_2^A(k_\mu^2) i \sigma^{\mu\nu} \frac{k_\nu}{2M}. \quad (5.5)$$

Im Unterschied zum schwachen Strom (2.10) ist der e.m. Strom ein reiner Vektorstrom.  $F_1^A$  ist der Dirac-Formfaktor und  $F_2^A$  der Pauli-Formfaktor. Sie sind Funktionen des Quadrats  $k_\mu^2 = k^\mu k_\mu$  des Viererimpulsübertrags  $k^\mu = p_A'^\mu - p_A^\mu$ , welches ebenfalls durch  $E_e$  und  $\theta_e$  bestimmt ist,

$$k_\mu^2 = -\frac{4E_e^2 \sin^2 \frac{\theta_e}{2}}{1 + \frac{2E_e}{M} \sin^2 \frac{\theta_e}{2}}. \quad (5.6)$$

Die Vorfaktoren in (5.4) und (5.5) treten auf, da die verwendeten Impulseigenzustände  $|\vec{p}_x\rangle$  nicht-kovariante Normierung besitzen,  $\langle \vec{p}_x | \vec{p}_x' \rangle = \delta(\vec{p}_x - \vec{p}_x')$ . Durch Kontraktion von leptonischem und nuklearem Strom kann für den Streuquerschnitt schließlich die Rosenbluth-Formel [39] hergeleitet werden,

$$\frac{d\sigma(E_e, \theta_e)}{d\Omega} = \left( \frac{d\sigma(E_e, \theta_e)}{d\Omega} \right)_{\text{Mott}} \left( A(k_\mu^2) + B(k_\mu^2) \tan^2 \frac{\theta_e}{2} \right) \quad (5.7)$$

mit

$$A(k_\mu^2) = \frac{(G_E^A(k_\mu^2))^2 - \frac{k_\mu^2}{4M^2} (G_M^A(k_\mu^2))^2}{1 - \frac{k_\mu^2}{4M^2}}, \quad (5.8)$$

$$B(k_\mu^2) = -\frac{k_\mu^2}{2M^2} (G_M^A(k_\mu^2))^2. \quad (5.9)$$

Hierbei hat es sich als günstig erwiesen, die nuklearen Sachs-Formfaktoren

$$G_E^A(k_\mu^2) = F_1^A(k_\mu^2) + \frac{k_\mu^2}{4M^2} F_2^A(k_\mu^2), \quad (5.10)$$

$$G_M^A(k_\mu^2) = F_1^A(k_\mu^2) + F_2^A(k_\mu^2), \quad (5.11)$$

einzuführen. Der Mott-Streuquerschnitt [32] ist gegeben durch

$$\left( \frac{d\sigma(E_e, \theta_e)}{d\Omega} \right)_{\text{Mott}} = Z^2 \left( \frac{e^2}{4\pi} \right)^2 \frac{\cos^2 \frac{\theta_e}{2}}{4E_e^2 \sin^4 \frac{\theta_e}{2}} \frac{1}{1 + \frac{2E_e}{M} \sin^2 \frac{\theta_e}{2}} \quad (5.12)$$

und beschreibt die Streuung relativistischer Elektronen an einem spinlosen Punktteilchen der Ladung  $Z$  und Masse  $M$ .

Die e.m. Formfaktoren sind aus unpolarisierter Elektronenstreuung experimentell getrennt extrahiert worden. Im folgenden Abschnitt vergleichen wir daher unsere theoretischen Vorhersagen für diese Größen mit den experimentellen Daten. Zur theoretischen Beschreibung der e.m. Formfaktoren des gebundenen Dreinukleonen-Systems verwenden wir das in Kapitel 3 vorgestellte Modell. Der schwache Stromoperator  $J^\mu(\vec{k})$  ist hierbei durch den e.m. Stromoperator  $J_{em}^\mu(\vec{k})$  zu ersetzen, der aus einem isoskalaren ( $IS$ ) und einem isovektoriellen ( $IV$ ) Anteil besteht,

$$J_{em}^\mu(\vec{k}) = J_{em}^{IS,\mu}(\vec{k}) + J_{em}^{IV,\mu}(\vec{k}). \quad (5.13)$$

Zur Berechnung der Formfaktoren benutzen wir die zu (4.29) und (4.30) analogen, für das Breit-System geltenden Formeln,

$$G_E^A(k_\mu^2) = \sqrt{2\pi} \frac{E}{M} \langle \Psi_A || T_{\text{coul},em}^{(0)}(k) || \Psi_A \rangle, \quad (5.14)$$

$$G_M^A(k_\mu^2) = -i\sqrt{\pi} \frac{E}{M} \frac{2M}{k} \langle \Psi_A || T_{\text{magn},em}^{(1)}(k) || \Psi_A \rangle. \quad (5.15)$$

$k = |\vec{k}| = (-k_\mu^2)^{\frac{1}{2}}$  ist der Betrag des Dreierimpulsübertrags im Breit-System. Da  ${}^3\text{He}$  und  ${}^3\text{H}$  in sehr guter Näherung ein Isospindublett bilden, ist es vom theoretischen Standpunkt aus sinnvoll, die isoskalaren und isovektoriellen Formfaktoren einzuführen,

$$G_E^{IS}(k_\mu^2) = G_E^{3\text{He}}(k_\mu^2) + G_E^{3\text{H}}(k_\mu^2), \quad (5.16)$$

$$G_E^{IV}(k_\mu^2) = G_E^{3\text{He}}(k_\mu^2) - G_E^{3\text{H}}(k_\mu^2), \quad (5.17)$$

$$G_M^{IS}(k_\mu^2) = G_M^{3\text{He}}(k_\mu^2) + G_M^{3\text{H}}(k_\mu^2), \quad (5.18)$$

$$G_M^{IV}(k_\mu^2) = G_M^{3\text{He}}(k_\mu^2) - G_M^{3\text{H}}(k_\mu^2). \quad (5.19)$$

Die isoskalaren Formfaktoren werden durch die isoskalaren Stromoperatoren bestimmt, die isovektoriellen Formfaktoren durch die isovektoriellen Stromoperatoren.

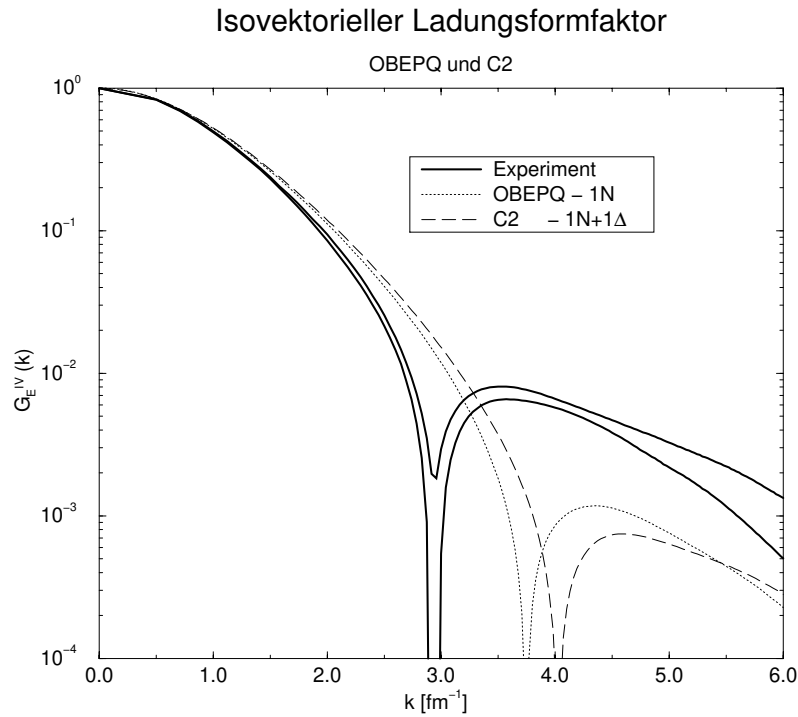
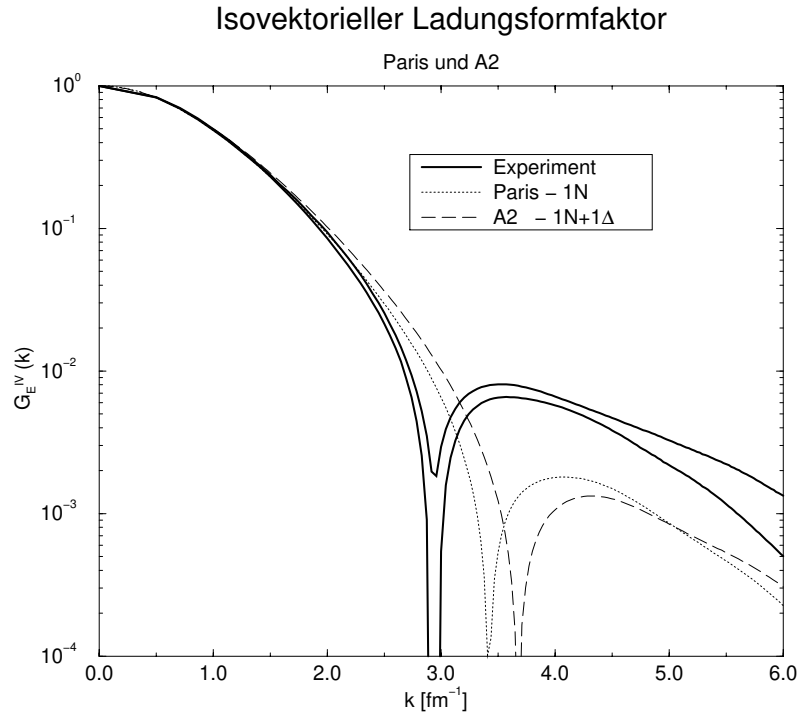
## 5.2 Elektromagnetische Formfaktoren

Die Ladungsformfaktoren und die magnetischen Formfaktoren von  ${}^3\text{He}$  und  ${}^3\text{H}$  sind experimentell getrennt vermessen worden. In diesem Abschnitt wollen wir unsere erzielten Resultate mit den experimentellen Daten vergleichen. Die Berechnung der Ladungsformfaktoren beschränkt sich auf den für Myon-Einfang relevanten Bereich niedriger Impulsüberträge und vernachlässigt die in diesem Bereich unwichtigen Austauschstrom-Korrekturen. Die Berechnung der magnetischen Formfaktoren hingegen ist eine vollständige Neuberechnung und definiert einen neuen Standard in der Kerntheoriegruppe Hannover.

### Isovektorieller Ladungsformfaktor

Bei verschwindendem Impulsübertrag verschwinden Zweikörper-Korrekturen zur Ladung. Beim für Myon-Einfang relevanten Impulsübertrag sind die Einflüsse dieser Korrekturen noch sehr gering [23] und werden erst bei höheren Impulsüberträgen wichtig. Aus diesem Grund sind Zweikörper-Beiträge zum Ladungsformfaktor in dieser Arbeit nicht berücksichtigt worden. Die von uns durchgeführte Rechnung ist daher nicht als vollständige Neuberechnung des Ladungsformfaktors anzusehen, sondern lediglich als eine im Niederenergiebereich gültige Approximation. Da die hier dargestellte Berechnung somit nur eine vorbereitende Rechnung für die Myon-Einfang-Reaktion darstellt, wollen wir an dieser Stelle auch nur die für Myon-Einfang relevanten Resultate für den isovektoriellen Ladungsformfaktor  $G_E^{IV}(k_\mu^2)$  diskutieren. Die Abbildung 5.2 zeigt die Resultate für diesen Formfaktor in der nur Einkörper-Ströme berücksichtigenden Impulsapproximation. Im Fall des Paris- und A2-Potentials treten erst ab Impulsüberträgen, die größer als  $2 \text{ fm}^{-1}$  ( $\geq 400 \text{ MeV}$ ) sind, deutliche Diskrepanzen zwischen Theorie und Experiment auf. Beim OBEPQ- und C2-Potential treten diese Diskrepanzen schon etwas eher auf. Das  $\Delta$ -Isobar verschiebt in beiden Fällen das Minimum zu etwas höheren Impulsüberträgen, während das experimentelle Minimum bei niedrigeren Impulsüberträgen liegt. Eine abschließende Diskussion ist an dieser Stelle nicht möglich, da die in diesem Bereich wichtiger werdenden Zweikörper-Korrekturen nicht berücksichtigt wurden. Von vorrangigem Interesse in dieser Arbeit ist jedoch die Frage, wie gut der isovektorielle Formfaktor beim für Myon-Einfang relevanten Impulsübertrag beschrieben wird. Die entsprechenden Resultate sind in Tabelle 5.1 aufgeführt. Dadurch, daß wir, wie in Kapitel 3.2 beschrieben wurde, im Ladungsoperator  $f_1^{IV}$  durch  $g_E^{IV}$  ersetzt haben, liefert der nicht-relativistische Operatoranteil in den rein-nukleonischen Kraftmodellen fast den gesamten Beitrag. Die relativistischen Einkörper-Korrekturen sind sehr klein ( $\approx 0.1\%$ ). Die in dieser Arbeit nicht berechneten Zweikörper-Korrekturen sind anhand einer früheren Arbeit abgeschätzt worden [23]. Sie sind beim betrachteten Impulsübertrag sogar noch kleiner als die relativistischen Einkörper-Korrekturen ( $\approx 0.03 - 0.04\%$ ) und würden die dargestellten Resultate nicht-signifikant beein-

flussen.



**Abbildung 5.2:** Resultate für den isovektoriellen Ladungsformfaktor  $G_E^{IV}$  in der Impulsapproximation für die verschiedenen Kraftmodelle. Der Impulsübertrag beim Myon-Einfang beträgt  $k=0.5231 \text{ fm}^{-1}$ .

**Tabelle 5.1:** Isektorieller Ladungsformfaktor des gebundenen Dreinukleonen-Systems beim für Myon-Einfang relevanten Vierer-Impulsübertrag. Berücksichtigt wurden nur Einkörper-Ladungsoperatoren. Die Resultate sind aufgespalten in nucleonische Beiträge ( $1N$ ) und Beiträge vom  $\Delta$ -Isobar ( $1\Delta$ ). Die Einnukleonen-Anteile setzen sich aus nichtrelativistischer Ladung (nr) und relativistischen Korrekturen (rc) zusammen. Der  $\Delta$ -Isobar-Beitrag ist nach indirektem Beitrag ( $1\Delta$ -indirekt) und direktem Beitrag ( $1\Delta$ - $\Delta\Delta$ ) aufgespalten. In den Klammern steht das Verhältnis aus theoretischem Wert und experimentellem Wert.

$G_E^{IV}(-0.954m_\mu^2)$	Paris	A2	OBEPQ	C2
$1N$ -nr	0.809	0.799	0.826	0.809
$1N$ -rc	-0.001	-0.001	-0.001	-0.001
$1N$	0.808	0.798	0.825	0.808
$1\Delta$ -indirekt		-0.013		-0.015
$1\Delta$ - $\Delta\Delta$		0.026		0.030
$1\Delta$		0.014		0.016
total	0.808	0.812	0.825	0.823
	(97.9%)	(98.4%)	(100.0%)	(99.8%)
Experiment	$0.825 \pm 0.005$			

Die einzelnen  $\Delta$ -Beiträge sind recht groß ( $\approx 1 - 4\%$ ) und für die Kraftmodelle A2 und C2 ziemlich ähnlich. Der Netto-Effekt des  $\Delta$ -Isobars, den wir als Differenz der Resultate von erweitertem Kraftmodell und nukleonischem Referenzmodell definieren, ist hingegen relativ klein. Beim Übergang von Paris zu A2 erhöht sich der Wert des Formfaktors um  $\approx 0.5\%$ , während er sich beim Übergang von OBEPQ zu C2 um  $\approx 0.3\%$  verringert. Das Paris-Potential unterschätzt den experimentellen Wert um  $\approx 2\%$ , beim A2-Potential beträgt die Diskrepanz noch  $\approx 1.5\%$ . Das Bonn OBEPQ Potential und das C2 Potential sind in sehr guter Übereinstimmung mit dem Experiment. Die Diskrepanz von Paris und A2 mag damit zusammenhängen, daß diese Kraftmodelle den experimentellen Wert für die Tritium-Bindungsenergie unterschätzen (siehe Kapitel 3.1). Dies führt zu einer größeren räumlichen Ausdehnung des Systems und damit zu einer Vergrößerung des Ladungsradius  $r_{ch}$ , der mit dem Formfaktor über die Relation

$$G_E(k_\mu^2) \approx G_E(0) - \frac{r_{ch}^2}{6} |k_\mu^2|$$

verknüpft ist. Ein zu großer Ladungsradius hat somit einen zu starken Abfall des Formfaktors zur Folge.



### Isovektorieller magnetischer Formfaktor

Von den magnetischen Formfaktoren wollen wir zuerst den isovektoriellen Formfaktor  $G_E^{IV}(k_\mu^2)$  diskutieren, der aufgrund der CVC-Relation (siehe Kap. 6.1) direkten Einfluß auf die Myon-Einfang Reaktion hat. Wir beginnen daher mit den Ergebnissen, die sich für diesen Formfaktor bei verschwindendem und beim für Myon-Einfang relevanten Impulsübertrag ergeben haben.

In den Tabellen 5.2 und 5.3 sind diese Resultate nach den einzelnen Beiträgen aufgeschlüsselt. Zunächst wollen wir die Beiträge in den rein-nukleonischen Rechnungen betrachten, die in Tabelle 5.2 dargestellt sind. Der Formfaktor ist so normiert worden, daß er bei verschwindendem Impulsübertrag das isovektorielle magnetische Moment in Einheiten des nuklearen Magnetons liefert, welches in den linken Spalten dargestellt ist. Die Impulsapproximation wird fast vollständig dominiert vom Spin-Strom, der Konvektions-Strom stellt lediglich eine Korrektur von etwa 0.1 – 0.2% dar. Der wichtigste Zweikörper-Strom ist der  $\pi$ -Kontakt-Strom, der ungefähr 15% des Gesamtbeitrags liefert. Die übrigen Austauschkorrekturen sind wesentlich kleiner und zeigen die Tendenz, sich gegenseitig wegzuheben. Wie bei niedrigen Impulsüberträgen zu erwarten war, sind die Beiträge der langreichweitigen  $\pi$ -Ströme größer als die Beiträge der kürzerreichweitigen  $\rho$ -Ströme. Auch der nicht-potentialartige  $\omega\pi\gamma$ , liefert mit weniger als 1% einen geringen Beitrag zum Gesamtergebn. Beim für Myon-Einfang relevanten Impulsübertrag ist der Formfaktor um etwa 15% abgefallen. Die verschiedenen Beiträge fallen ebenfalls moderat ab, zeigen aber keine wesentlichen relativen Veränderungen zueinander. Vergleichen wir die Resultate zwischen dem Paris und dem Bonn OBEPQ-Potential, so stellen wir fest, daß die Einkörper-Beiträge sich mit 2 – 3% im Vergleich zu den Zweikörper-Beiträgen relativ wenig voneinander unterscheiden. Die einzelnen Zweikörper-Beiträge sind in der Rechnung mit dem Paris-Potential und dem OBEPQ besonders bei den Austauschströmen vom Meson im Flug-Typ deutlich verschieden. Die Gesamtergebnisse liegen jedoch wiederum relativ dicht beieinander. Es zeigt sich die Tendenz, daß sich die Abweichungen in der Impulsapproximation gegen die Abweichungen in den Austauschkorrekturen aufheben und damit die Modellabhängigkeit reduzieren.

Vergleichen wir die Tabellen 5.2 und 5.3, so sehen wir, daß sich die nukleonischen Beiträge beim Übergang von den rein-nukleonischen zu den erweiterten Kraftmodellen relativ wenig ändern. Der größte  $\Delta$ -Beitrag kommt mit 2 – 2.5% vom Einkörper- $N\Delta$ -Übergangsstrom. Der Einfluß der Zweikörper-Ströme mit  $\Delta$ -Isobar-Anregung ist mit 0.8% vergleichsweise gering. In den Tabellen 5.4 und 5.5 vergleichen wir die erzielten Resultate mit den experimentellen Daten. Die Rechnungen, in denen nur Einkörper-Ströme berücksichtigt werden, unterschätzen das isovektorielle magnetische Moment um 12 – 15%. Die vollen Rechnungen hingegen, die Zweikörper-Ströme mitberücksichtigen, sind in wesentlich besserer Übereinstimmung mit dem Experiment. Dies kann als beeindruckender Hinweis auf die Existenz von Zweikörper-Strömen gewertet werden. Während die nukleo-

nischen Referenzpotentiale Paris und OBEPQ das magnetische Moment noch um  $1.5 - 2\%$  unterschätzen, führt die Miteinbeziehung des  $\Delta$ -Isobars in die Beschreibung zu fast völliger Übereinstimmung mit dem Experiment. Definiert man den  $\Delta$ -Effekt als Differenz zwischen erweitertem Kraftmodell und nukleonischem Referenzpotential, so beträgt er  $2.5\%$  beim A2-Potential und  $1.5\%$  beim C2-Potential. Beim für Myon-Einfang relevanten Impulsübertrag zeigen sich keine wesentlichen qualitativen Veränderungen. Die vollen Rechnungen mit den erweiterten Kraftmodellen sind wiederum in sehr guter Übereinstimmung mit dem Experiment. Der  $\Delta$ -Effekt nimmt mit  $1.8 - 3.3\%$  etwas zu.

**Tabelle 5.2:** Ein- und Zweinukleonen-Beiträge zum isovektoriellen magnetischen Formfaktor bei verschwindendem und beim für Myon-Einfang relevanten Impulsübertrag.

	$G_M^{IV}(0)$		$G_M^{IV}(-0.954m_\mu^2)$	
Beitrag	Paris	OBEPQ	Paris	OBEPQ
1N-Spin	-4.361	-4.436	-3.604	-3.732
1N-Konvektion	0.006	0.007	0.005	0.006
1N	-4.355	-4.429	-3.599	-3.726
2N- $\pi$ -Kontakt	-0.675	-0.722	-0.623	-0.669
2N- $\pi$ -Meson	0.169	0.270	0.141	0.233
2N- $\rho$ -Kontakt	-0.089	-0.104	-0.084	-0.098
2N- $\rho$ -Meson	-0.032	-0.021	-0.030	-0.020
2N- $\rho$ -Meson-tr	0.016	0.009	0.015	0.008
2N- $\omega\pi\gamma$	-0.043	-0.035	-0.040	-0.032
2N	-0.655	-0.604	-0.621	-0.578
total	-5.010	-5.033	-4.221	-4.305

**Tabelle 5.3:** Einnukleonen-, Zweinukleonen- und  $\Delta$ -Isobar-Beiträge zum isovektoriellen magnetischen Formfaktor bei verschwindendem und beim für Myon-Einfang relevanten Impulsübertrag.

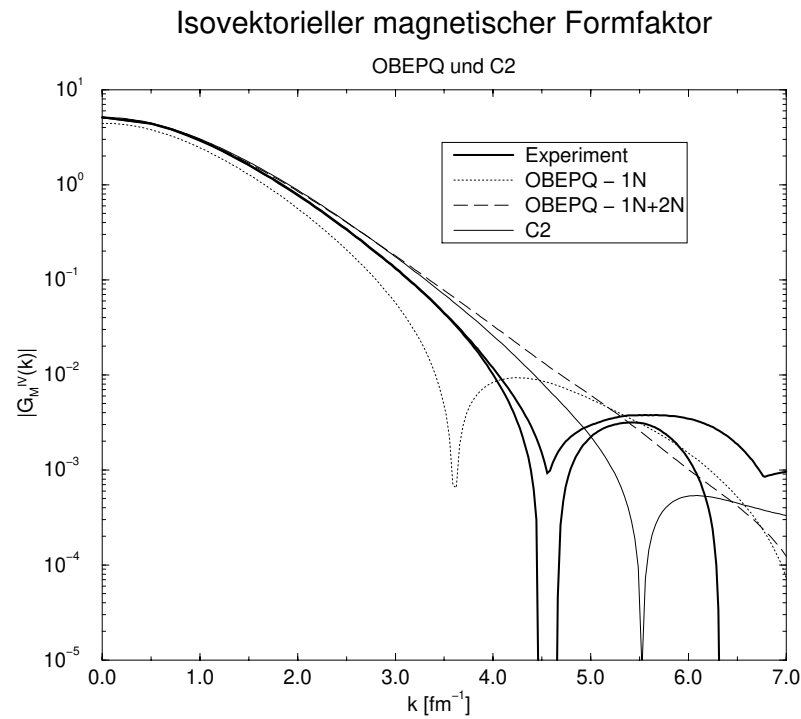
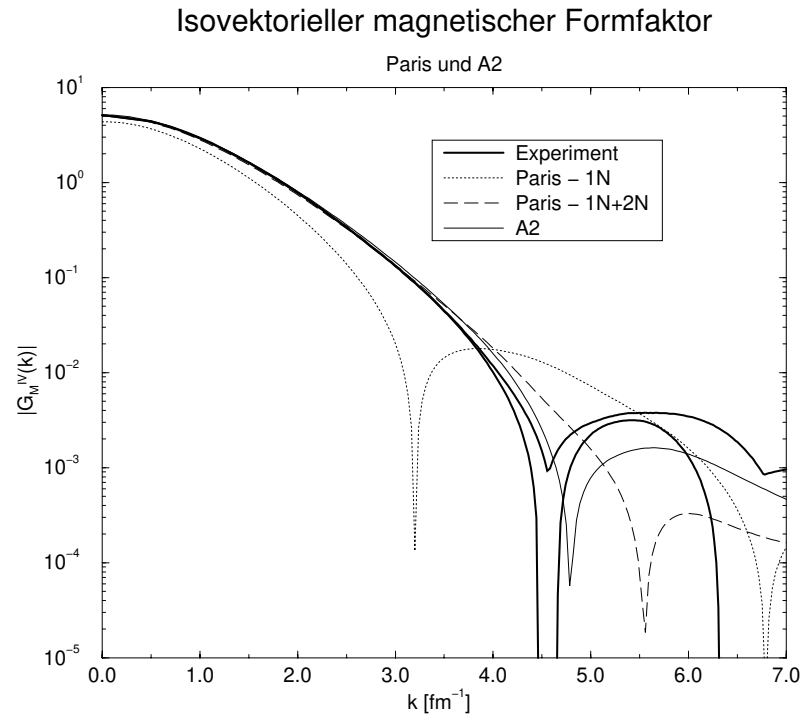
	$G_M^{IV}(0)$		$G_M^{IV}(-0.954m_\mu^2)$	
Beitrag	A2	C2	A2	C2
1N-Spin	-4.267	-4.320	-3.546	-3.637
1N-Konvektion	0.007	0.008	0.006	0.007
1N	-4.260	-4.312	-3.540	-3.630
1 $\Delta$ -indirekt	-0.040	-0.046	-0.035	-0.041
1 $\Delta$ -N $\Delta$	-0.135	-0.111	-0.121	-0.099
1 $\Delta$ - $\Delta\Delta$	0.000	0.000	0.000	0.000
1 $\Delta$	-0.175	-0.157	-0.156	-0.139
1N + 1 $\Delta$	-4.435	-4.469	-3.697	-3.769
2N- $\pi$ -Kontakt	-0.681	-0.712	-0.630	-0.660
2N- $\pi$ -Meson	0.170	0.260	0.142	0.224
2N- $\rho$ -Kontakt	-0.089	-0.100	-0.084	-0.094
2N- $\rho$ -Meson	-0.033	-0.022	-0.031	-0.020
2N- $\rho$ -Meson-tr	0.017	0.010	0.016	0.009
2N- $\omega\pi\gamma$	-0.044	-0.035	-0.041	-0.032
2N	-0.660	-0.599	-0.628	-0.574
2 $\Delta$ - $\pi$ -Kontakt-N $\Delta$ -NN $\gamma$	-0.029	-0.034	-0.028	-0.032
2 $\Delta$ - $\pi$ -Kontakt-N $\Delta$ -N $\Delta\gamma$	0.010	0.011	0.009	0.011
2 $\Delta$ - $\pi$ -Meson-N $\Delta$	-0.009	-0.010	-0.008	-0.009
2 $\Delta$ - $\rho$ -Kontakt-N $\Delta$ -NN $\gamma$	0.000	0.001	0.000	0.001
2 $\Delta$ - $\rho$ -Kontakt-N $\Delta$ -N $\Delta\gamma$	-0.001	-0.001	-0.001	-0.001
2 $\Delta$ - $\rho$ -Meson-N $\Delta$	0.000	-0.001	0.000	-0.001
2 $\Delta$ - $\rho$ -Meson-tr-N $\Delta$	0.001	0.001	0.001	0.001
2 $\Delta$ - $\omega\pi\gamma$ -N $\Delta$	-0.011	-0.011	-0.010	-0.010
2 $\Delta$	-0.039	-0.043	-0.037	-0.040
2N + 2 $\Delta$	-0.700	-0.642	-0.665	-0.614
total	-5.135	-5.111	-4.361	-4.384

**Tabellen 5.4 und 5.5:** Resultate für den isovektoriellen magnetischen Formfaktor bei verschwindendem Impulsübertrag und beim für Myon-Einfang relevanten Impulsübertrag. Die Normierung ist so gewählt, daß der Wert des Formfaktors bei verschwindendem Impulsübertrag dem isovektoriellen magnetischen Moment  $\mu^{IV}$  in Einheiten des nuklearen Magnetons entspricht. In den Klammern steht das Verhältnis von theoretischem und experimentellem Wert.

$G_M^{IV}(0)$	Paris	A2	OBEPQ	C2
IA	-4.355 (85.3%)	-4.435 (86.9%)	-4.429 (86.7%)	-4.469 (87.5%)
MEC	-0.655	-0.700	-0.604	-0.642
total	-5.010 (98.1%)	-5.135 (100.6%)	-5.033 (98.6%)	-5.111 (100.1%)
Experiment	-5.106			

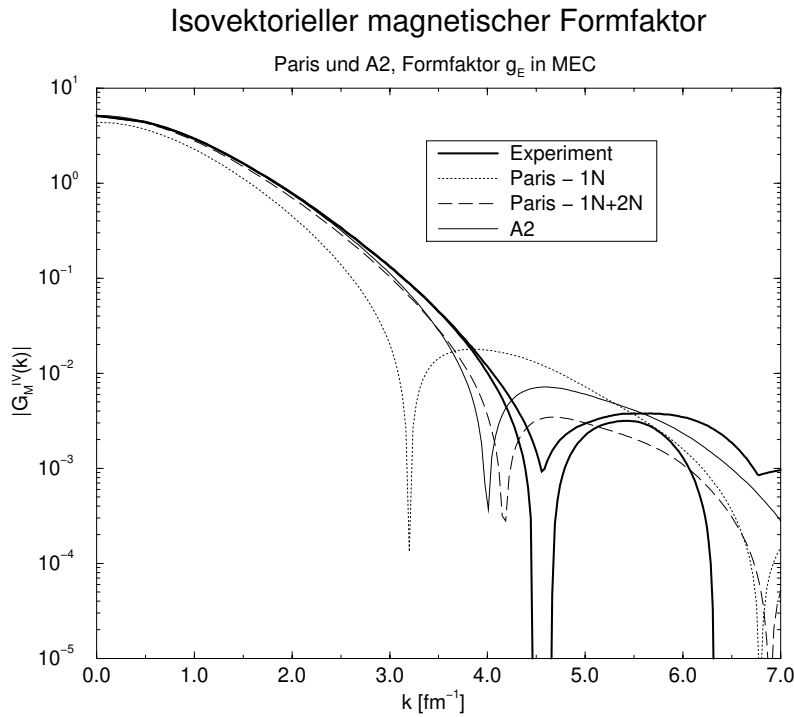
$G_M^{IV}(-0.954m_\mu^2)$	Paris	A2	OBEPQ	C2
IA	-3.599 (82.8%)	-3.697 (85.1%)	-3.726 (85.8%)	-3.769 (86.7%)
MEC	-0.621	-0.665	-0.578	-0.614
total	-4.221 (97.1%)	-4.361 (100.4%)	-4.305 (99.1%)	-4.384 (100.9%)
Experiment	$-4.345 \pm 0.020$			

Nach der detaillierten Diskussion des isovektoriellen magnetischen Formfaktors im Niederenergiebereich, wollen wir uns nun anschauen, wie sich dieser Formfaktor bei größeren Impulsüberträgen entwickelt. Im oberen Teil der Abbildung 5.3 sind die Resultate für Paris und A2 dargestellt, im unteren Teil die Resultate für OBEPQ und C2. Die oberen und unteren experimentellen Grenzen sind durch die breiten Linien dargestellt. Wiederum zeigt sich, daß die Impulsapproximation die experimentellen Resultate deutlich unterschätzt, was sich besonders deutlich darin zeigt, daß das erste Minimum bei zu kleinen Impulsüberträgen liegt. Die vollen Rechnungen von Paris und A2 sind bis  $\approx 3 \text{ fm}^{-1}$  in fast perfekter Übereinstimmung mit dem Experiment. Das Minimum der vollen Paris-Rechnung liegt bei zu großem Impulsübertrag. Das A2-Potential ist hingegen in sehr guter Übereinstimmung mit den experimentellen Daten. Das OBEPQ und C2-Potential liefern im Vergleich zu Paris und A2 eine schlechtere Beschreibung. Bereits ab  $\approx 2 \text{ fm}^{-1}$  zeichnet sich ab, daß die vollen Rechnungen mit diesen Potentialen den experimentellen Formfaktor überschätzen. Der mit dem OBEPQ-Potential berechnete Formfaktor besitzt in dem dargestellten Bereich nicht einmal ein Minimum. Die Beschreibung mit dem erweiterten Kraftmodell C2 wird besser, das Minimum liegt jedoch nach wie vor bei zu hohem Impulsübertrag.



**Abbildung 5.3:** Resultate für den isovektoriellen magnetischen Formfaktor.

In Ref. [30] wird in den potentialartigen Austauschströmen der nukleonische Formfaktor  $f_1^{IV}$  durch  $g_E^{IV}$  ersetzt. Die Änderungen, die sich durch so eine Wahl ergeben, sind in Abbildung 5.3a dargestellt. Da  $g_E^{IV}$  kleiner als  $f_1^{IV}$  ist, ist der Beitrag der Austauschströme kleiner und das Minimum der vollen Paris-Rechnung liegt bei zu kleinem Impulsübetrag. Der Einfluß des  $\Delta$ -Isobars verschiebt das Minimum etwas nach links und führt in diesem Fall zu einer leichten Verschlechterung der Beschreibung.



**Abbildung 5.3a:** Resultate für den isovektoriellen magnetischen Formfaktor für das Paris und A2-Potential, wobei in den potentialartigen Zweikörper-Strömen der nukleonische Formfaktor  $f_1^{IV}$  durch  $g_E^{IV}$  ersetzt wurde.

### Isoskalarer magnetischer Formfaktor

In diesem Abschnitt wollen wir die Resultate für den isoskalaren Formfaktor  $G_E^{IS}(k_\mu^2)$  präsentieren. In Tabelle 5.6 sind die Resultate für diesen Formfaktor bei verschwindendem Impulsübertrag angegeben. Der Formfaktor ist so normiert, daß er dem isoskalaren magnetischen Moment  $\mu^{IS}$  in Einheiten des nuklearen Magnetons entspricht. Der Spin-Strom liefert wiederum den weitaus größten Beitrag zum magnetischen Moment. Der Beitrag des Konvektions-Stroms ist im Vergleich zum isovektoriellen Anteil wesentlich bedeutender und macht 8 – 10% des Gesamtbeitrags aus. Der einzige berücksichtigte Zweinukleonen-Strom ist der  $\rho\pi\gamma$ -Strom. Während er beim Paris mit etwa 2% recht groß ist, ist er beim OBEPQ-Potential um mehr als einen Faktor 10 kleiner und so gut wie vernachlässigbar. Dieser beträchtliche Unterschied rührt vor allem daher, daß die verwendeten Operatoren konsistent mit dem Kraftmodell abgestimmt sind. Während beim Paris-Potential ein starker  $\rho NN$ -Formfaktor vom Wurzeltyp benutzt wird, verwenden wir beim OBEPQ-Potential einen Dipol-Formfaktor. Der Effekt des  $\Delta$ -Isobars zum magnetischen Moment ist ebenfalls sehr gering. Dies liegt daran, daß der beim isovektoriellen Formfaktor dominante Einkörper- $N\Delta$ -Übergangstrom ausschließlich isovektoriell ist und somit hier keinen Beitrag liefert.

Die Beschreibung mit Einkörper-Strömen liefert für das Paris-Potential einen um 4.5% zu niedrigen Wert gegenüber dem Experiment, beim OBEPQ-Potential ist er um 2.1% zu niedrig. Die vollen Resultate liegen erfreulicherweise wieder viel näher beisammen, unterschätzen aber nach wie vor den experimentellen Wert, A2 um 2.1% und C2 um 1.8%. Der Effekt des  $\Delta$ -Isobars macht etwa 0.3% aus.

In Abbildung 5.4 sind die Resultate für den isoskalaren Formfaktor über einen weiten Bereich von Impulsüberträgen dargestellt. Die theoretische Beschreibung ist für alle verwendeten Kraftmodelle in sehr guter Übereinstimmung mit den experimentellen Daten. Im gesamten Bereich ist der Einfluß von Zweinukleonen-Strömen und  $\Delta$ -Isobar-Strömen sehr gering.

**Tabelle 5.6:** Resultate für den isoskalaren magnetischen Formfaktor bei verschwindendem Impulsübertrag. Die Normierung ist so gewählt, daß die angegebenen Werte das isoskalare magnetische Moment  $\mu^{IS}$  in Einheiten des nuklearen Magnetons liefern. In den Klammern steht das Verhältnis von theoretischem und experimentellem Wert.

$G_M^{IS}(0)$	Paris	A2	OBEPQ	C2
1N-Spin	0.734	0.711	0.772	0.747
1N-Konvektion	0.081	0.084	0.060	0.063
1N	0.814	0.795	0.833	0.811
1 $\Delta$ -indirekt		0.022		0.025
1 $\Delta$ - $\Delta\Delta$		0.000		0.000
1 $\Delta$		0.022		0.025
1N + 1 $\Delta$	0.814 (95.5%)	0.817 (95.9%)	0.833 (97.8%)	0.836 (98.1%)
2N- $\rho\pi\gamma$	0.017	0.018	0.001	0.001
2 $\Delta$ - $\rho\pi\gamma$ -N $\Delta$		0.000		0.000
2N + 2 $\Delta$	0.017	0.017	0.001	0.001
total	0.832 (97.7%)	0.834 (97.9%)	0.833 (97.8%)	0.837 (98.2%)
Experiment	0.852			



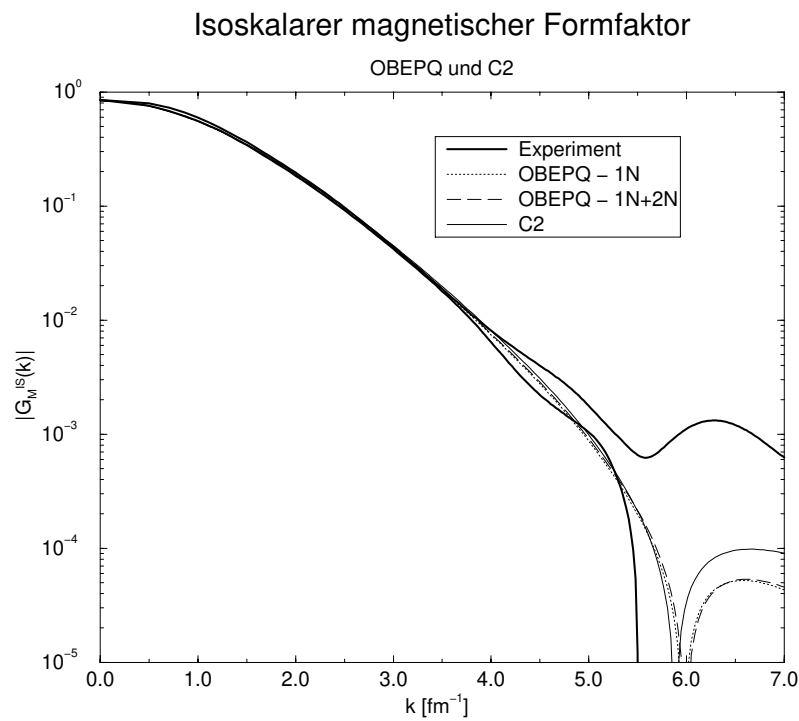
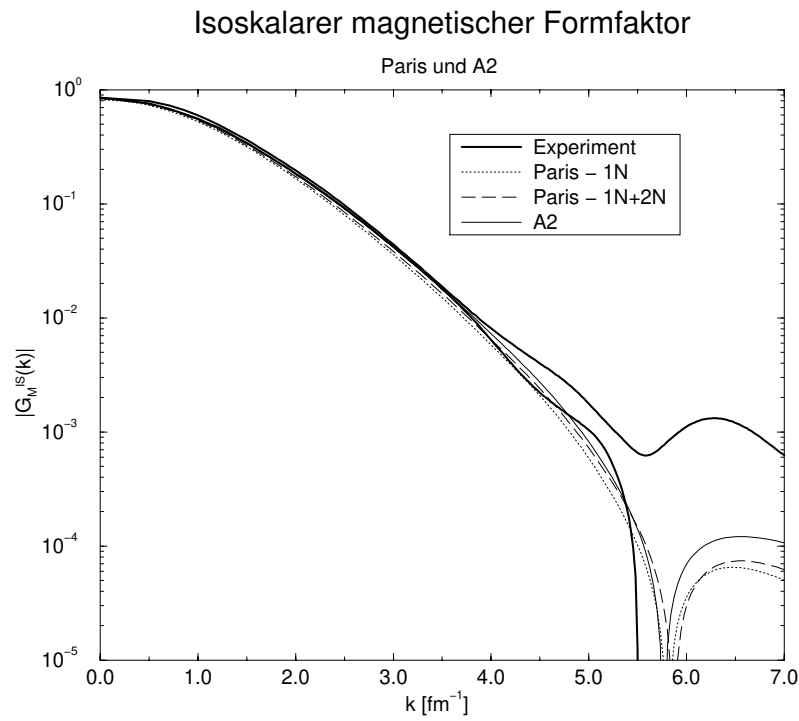


Abbildung 5.4: Resultate für den isoskalaren magnetischen Formfaktor.

### Magnetische Formfaktoren von $^3\text{He}$ und $^3\text{H}$

In diesem Abschnitt stellen wir die Resultate für die magnetischen Formfaktoren von  $^3\text{He}$  und  $^3\text{H}$  dar. Diese Formfaktoren sind gemäß Abschnitt 5.1 Linearkombinationen vom isoskalaren und isovektoriellen Formfaktor. Da der isovektorielle Beitrag deutlich größer ist als der isoskalare Beitrag, ähneln die hier dargestellten Resultate sehr den Resultaten für den isovektoriellen Formfaktor. Wir wollen die Diskussion daher ziemlich knapp halten. In den Tabellen 5.7 und 5.8 sind die Resultate für die magnetischen Momente angegeben. Auch hier kommt noch einmal die große Bedeutung der Zweikörper-Korrekturen zum Vorschein. Die vollen Resultate für die erweiterten Kraftmodelle A2 und C2 sind sowohl für  $^3\text{He}$  als auch für  $^3\text{H}$  in sehr guter Übereinstimmung mit dem Experiment.

In den Abbildungen 5.5 und 5.6 sind die Formfaktorresultate über einen weiten Bereich des Impulsübertrages angegeben. Wie beim isovektoriellen Formfaktor zeigt sich, daß das A2-Potential eine sehr gute Beschreibung der experimentellen Daten liefert, während das C2-Potential bei Impulsüberträgen, die größer als  $2 \text{ fm}^{-1}$  sind, die experimentellen Formfaktoren überschätzt und nicht in der Lage ist, die experimentellen Minima zu beschreiben.

**Tabellen 5.7 und 5.8:** Resultate für die magnetischen Momente von  $^3\text{He}$  und  $^3\text{H}$  in Einheiten des nuklearen Magnetons. In den Klammern steht das Verhältnis von theoretischem und experimentellem Wert.

$G_M^{^3\text{He}}(0)$	Paris	A2	OBEPQ	C2
IA	−1.770 (83.2%)	−1.809 (85.0%)	−1.798 (84.5%)	−1.817 (85.4%)
MEC	−0.319	−0.341	−0.301	−0.320
total	−2.089 (98.2%)	−2.150 (101.1%)	−2.100 (98.7%)	−2.137 (100.5%)
Experiment	−2.127			

$G_M^{^3\text{H}}(0)$	Paris	A2	OBEPQ	C2
IA	2.585 (86.8%)	2.626 (88.2%)	2.631 (88.3%)	2.652 (89.0%)
MEC	0.336	0.359	0.302	0.322
total	2.921 (98.1%)	2.984 (100.2%)	2.933 (98.5%)	2.974 (99.8%)
Experiment	2.979			

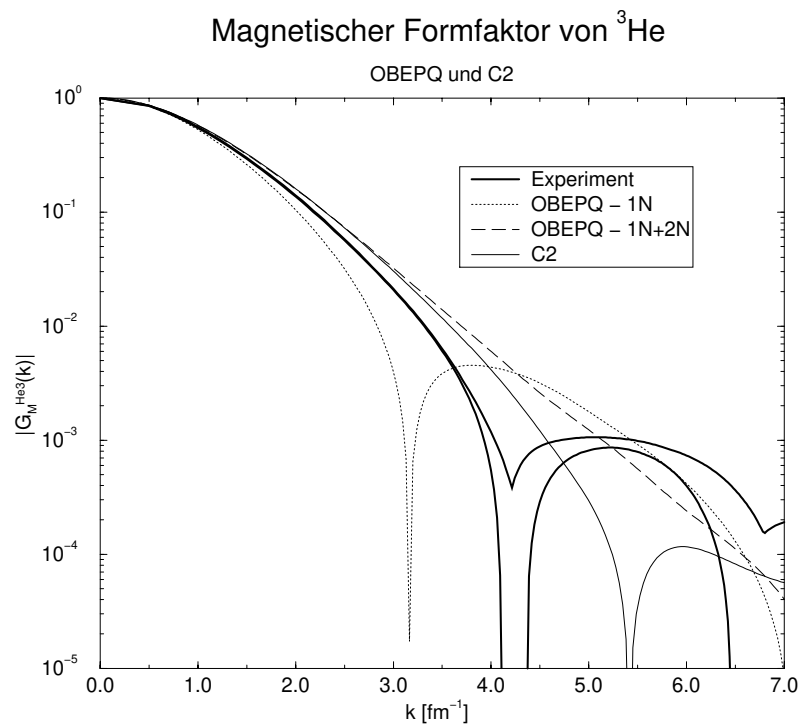
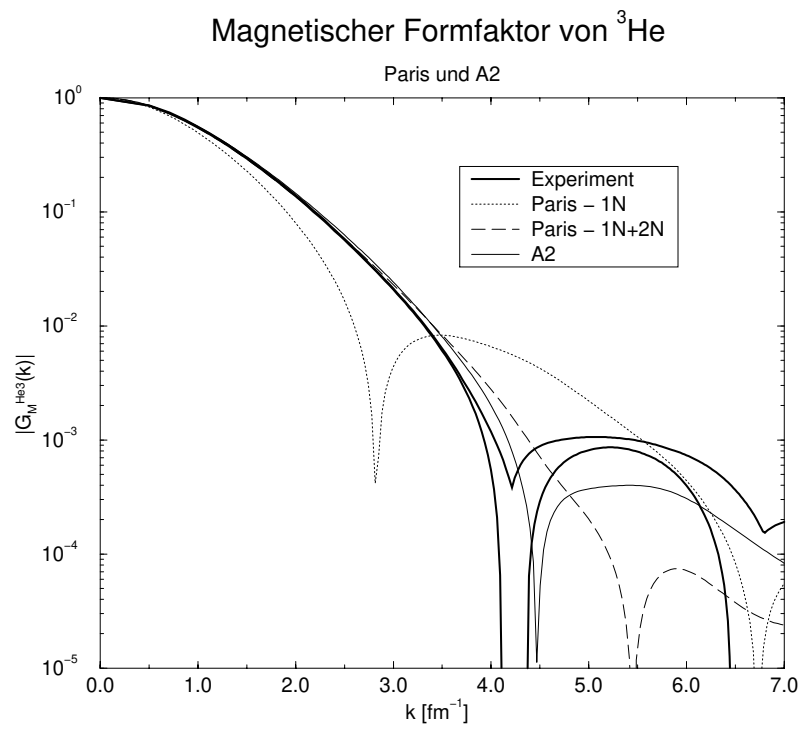


Abbildung 5.5: Resultate für den magnetischen Formfaktor von  ${}^3\text{He}$ .

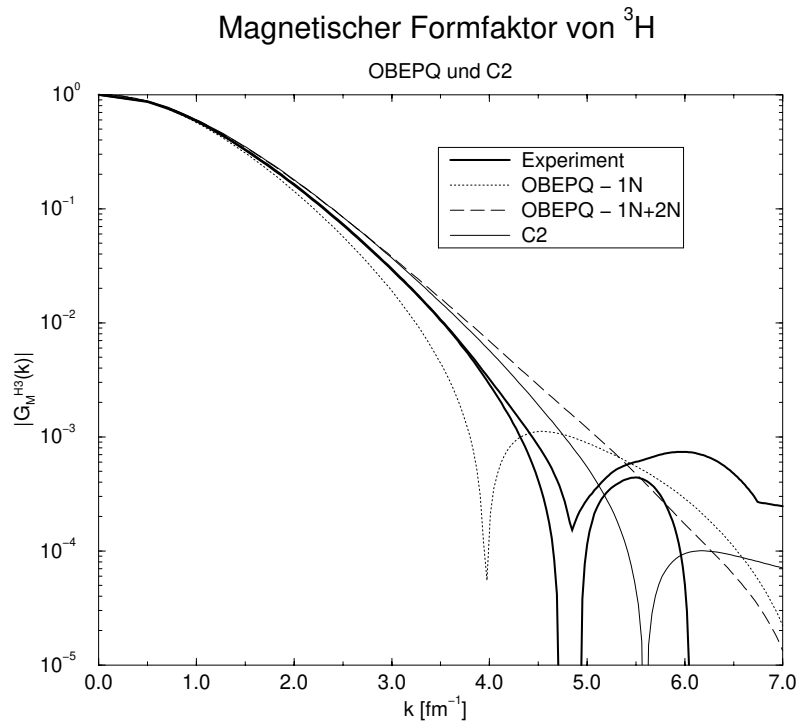
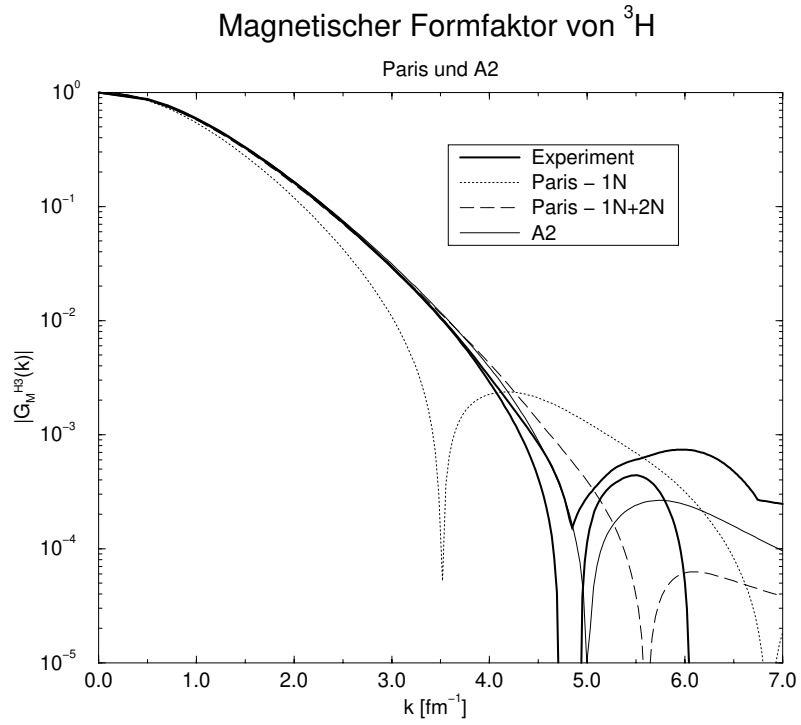


Abbildung 5.6: Resultate für den magnetischen Formfaktor von  ${}^3\text{H}$ .

# Kapitel 6

## Resultate für Myon-Einfang

Nach unserem Exkurs über die elastische Elektronenstreuung kehren wir nun wieder zum eigentlichen Thema dieser Arbeit, dem Myon-Einfang, zurück. In Abschnitt 6.1 präsentieren wir die Resultate für die vektoriellen Formfaktoren, die aufgrund der CVC Relation durch die isovektoriellen e.m. Formfaktoren gegeben sind. Die entsprechenden Resultate für die axialen Formfaktoren werden anschließend in 6.2 diskutiert. Die sich aus vektoriell und axialem Anteil ergebenden Ergebnisse für die effektiven Kopplungen und die Zerfallsrate des Myon-Einfangs stellen wir schließlich in 6.3 dar. In Abschnitt 6.4 untersuchen wir abschließend die Frage, inwieweit die Reaktion  $\mu + {}^3\text{He} \rightarrow \nu_\mu + {}^3\text{H}$  dazu dienen kann, den nukleonischen pseudoskalaren Formfaktor  $f_P$  zu extrahieren.

### 6.1 Vektorielle Formfaktoren

Die *Conserved Vector Current* (CVC) Relation [16] besagt, daß der Operator des isovektoriellen e.m. Stroms und der Operator des schwachen Vektorstroms durch eine Rotation im Isospinraum miteinander verknüpft sind. Der Spin- und Orbital-Anteil beider Operatoren ist identisch. Für die Formfaktoren ergeben sich daraus die Zusammenhänge,

$$F_V(k_\mu^2) = F_1^{IV}(k_\mu^2) = \frac{G_E^{IV}(k_\mu^2) - \frac{k_\mu^2}{4M^2} G_M^{IV}(k_\mu^2)}{1 - \frac{k_\mu^2}{4M^2}} \quad (6.1)$$

$$F_M(k_\mu^2) = F_2^{IV}(k_\mu^2) = \frac{G_M^{IV}(k_\mu^2) - G_E^{IV}(k_\mu^2)}{1 - \frac{k_\mu^2}{4M^2}} \quad (6.2)$$

d.h. die schwachen Formfaktoren  $F_V$  und  $F_M$  sind bestimmt durch die isovektoriellen e.m. Formfaktoren  $G_E^{IV}$  und  $G_M^{IV}$  und brauchen daher nicht mikroskopisch neu berechnet zu werden.

**Tabellen 6.1 und 6.2:** Die vektoriellen Formfaktoren  $F_V(k_\mu^2)$  und  $F_M(k_\mu^2)$  des gebundenen Dreinukleonen-Systems beim für Myon-Einfang relevanten Vierer-Impulsübertrag  $k_\mu^2 = -0.954m_\mu^2$ . In den Klammern steht das Verhältnis von theoretischem und experimentellem Wert.

$F_V(-0.954m_\mu^2)$	Paris	A2	OBEPQ	C2
IA	0.804 (98.0%)	0.808 (98.5%)	0.821 (100.1%)	0.819 (99.9%)
MEC	-0.001	-0.001	-0.001	-0.001
total	0.803 (97.9%)	0.807 (98.4%)	0.821 (100.0%)	0.819 (99.8%)
Experiment	$0.820 \pm 0.005$			

$F_M(-0.954m_\mu^2)$	Paris	A2	OBEPQ	C2
IA	-11.57 (83.6%)	-11.87 (85.7%)	-11.97 (86.5%)	-12.09 (87.4%)
MEC	-1.86	-1.99	-1.73	-1.84
total	-13.43 (97.0%)	-13.85 (100.1%)	-13.70 (99.0%)	-13.93 (100.6%)
Experiment	$-13.84 \pm 0.06$			

Da wir die isovektoriellen e.m. Formfaktoren  $G_E^{IV}$  und  $G_M^{IV}$  schon ausführlich in Kapitel 5 diskutiert haben, beschränken wir uns an dieser Stelle darauf, die Ergebnisse für  $F_V$  und  $F_M$  beim für Myon-Einfang relevanten Impulsübertrag anzugeben. Sie sind in den Tabellen 6.1 und 6.2 dargestellt.

$F_V$  wird an diesem Impulsübertrag im wesentlichen dominiert durch den isovektoriellen Ladungsformfaktor  $G_E^{IV}$ . Die vom räumlichen Strom stammenden Zweikörper-Korrekturen sind daher sehr klein. Beim Übergang von Paris zu A2 erhöht sich der Formfaktor um 0.5%, beim Übergang von OBEPQ zu C2 erniedrigt er sich um 0.2%. Der Gesamteffekt des  $\Delta$ -Isobars zu  $F_V$  ist also relativ klein. Die volle Rechnung mit dem A2-Potential unterschätzt den experimentellen Wert um etwa 1.6%, während die Rechnung mit dem C2-Potential in sehr guter Übereinstimmung mit dem Experiment ist.

$F_M$  wird durch den isovektoriellen magnetischen Formfaktor  $G_M^{IV}$  dominiert. Daher sind die Zweikörper-Beiträge mit  $\approx 15\%$  ziemlich groß und sind wesentlich, um den experimentellen Wert des Formfaktor gut zu beschreiben. Der sich aus dem Übergang von Paris zu A2 ergebende  $\Delta$ -Effekt beträgt 3.1 %, der  $\Delta$ -Effekt beim Übergang von OBEPQ zu C2 beträgt 1.6 %. Die beiden erweiterten Kraftmodelle A2 und C2 sind in sehr guter Übereinstimmung mit dem Experiment.

## 6.2 Axiale Formfaktoren

Die axialen Formfaktoren  $F_A(k_\mu^2)$  und  $F_P(k_\mu^2)$  sind experimentell weitestgehend unbekannt. Die neben dem Myon-Einfang einzige Informationsquelle ist der  $\beta$ -Zerfall des Tritium-Kerns ( $^3\text{H}$ ). Aus dieser Reaktion konnte das Gamow-Teller Matricelement bestimmt werden,

$$M(GT) = |F_A(0)/f_A(0)|. \quad (6.3)$$

$F_A(0)$  ist der axiale Formfaktor des gebundenen Dreinukleonen-Systems bei verschwindendem Impulsübertrag.  $f_A(0) = 1.257$  ist der entsprechende Formfaktor des Nukleons.

In den Tabellen 6.3 und 6.4 sind neben den Resultaten für das Gamow-Teller Matricelement auch die Werte des axialen Formfaktors  $F_A(k_\mu^2)$  bei verschwindendem und beim für Myon-Einfang relevanten Impulsübertrag angegeben. In 6.3 sind zunächst die Resultate für die rein-nukleonischen Kraftmodelle nach verschiedenen Beiträgen aufgeschlüsselt. Die relativistischen Korrekturen (rc) zur Impulsapproximation sind kleiner als 1 %. Die axialen Zweikörper-Ströme treten erst in relativistischer Ordnung auf und sind ebenfalls kleiner als 2 %. Vergleichen wir die Resultate für das Paris-Potential und das OBEPQ-Potential, so erkennen wir daß die Beiträge der Zweikörper-Ströme in beiden Rechnungen zum Teil sehr unterschiedlich sind. Während der gesamte Zweikörper-Beitrag beim Paris-Potential den Formfaktor etwas erhöht, liefert er beim OBEPQ-Potential eine Absenkung.

Anhand von Tabelle 6.4 erkennen wir, daß der größte  $\Delta$ -Beitrag vom axialen Einkörper- $N\Delta$ -Übergangsstrom kommt. Vergleicht man die Formfaktor-Werte bei  $k_\mu^2 = 0$  und  $k_\mu^2 = -0.954m_\mu^2$ , so erkennt man relativ geringe Veränderungen der Beiträge. Der gesamte Formfaktor fällt in diesem Bereich um etwa 18 % ab.

In Tabelle 6.5 werden die erzielten Resultate zusammengefaßt und mit dem experimentellen Wert für das Gamow-Teller-Matricelement (GT-ME) verglichen. In der Impulsapproximation unterschätzt die Paris-Rechnung das experimentelle GT-ME um 4.3 %, liegt mit 2.5 % Abweichung näher am Experiment. Der Einfluß der Zweikörper-Ströme ist in beiden Rechnungen unterschiedlich. Beim Paris-Potential reduzieren sie die Diskrepanz auf 3.7 %, während sie beim OBEPQ-Potential unterschiedliches Vorzeichen besitzen und die Abweichung auf 4.2 % erhöhen. Wir beobachten wiederum die Tendenz, daß die Resultate der Rechnungen mit Korrekturen näher beisammen liegen als die Resultate in der Impulsapproximation. Die Berücksichtigung der  $\Delta$ -Effekte verringert die Diskrepanzen um 1-2 %. Die volle A2-Rechnung unterschätzt das Experiment um 1.9 %, die volle C2-Rechnung unterschätzt das Experiment um 3.1 %.

**Tabellen 6.3 und 6.4:** Einnukleonen, Zweinukleonen- und  $\Delta$ -Isobar-Beiträge zum axialen Formfaktor bei verschwindendem und beim für Myon-Einfang relevanten Vierer-Impulsübertrag. In den Klammern stehen die Beiträge zum Gamow-Teller-Matrixelement  $M(GT)$ .

	$F_A(0) (M(GT) \times 1000)$				$F_A(-0.954m_\mu^2)$	
Beitrag	Paris		OBEPQ		Paris	OBEPQ
1N-nr	1.165	(927)	1.185	(943)	0.979	1.014
1N-rc	-0.008	(-6)	-0.007	(-6)	-0.007	-0.007
1N	1.157	(920)	1.178	(937)	0.972	1.007
2N- $\rho\pi$ -direkt	0.012	(10)	0.000	(0)	0.014	0.001
2N-A1-Pol	0.012	(10)	0.000	(0)	0.014	0.001
2N-non-Born	0.025	(20)	-0.001	(-1)	0.028	0.003
2N- $\pi$ -Vertex	-0.019	(-15)	-0.014	(-11)	-0.020	-0.016
2N- $\pi$ -ps-pv	0.010	(8)	0.010		0.010	0.010
2N- $\pi$ -Retardierung	-0.010	(-8)	-0.005	(-4)	-0.010	-0.005
2N-Born	-0.019	(-15)	-0.019	(-15)	-0.020	-0.021
2N	0.006	(5)	-0.020	(-16)	0.008	-0.018
total	1.163	(925)	1.158	(921)	0.979	0.989

	$F_A(0) (M(GT) \times 1000)$				$F_A(-0.954m_\mu^2)$	
Beitrag	A2		C2		A2	C2
1N	1.132	(900)	1.147	(912)	0.956	0.981
1 $\Delta$ -indirekt	0.011	(9)	0.012	(10)	0.009	0.011
1 $\Delta$ -N $\Delta$	0.036	(29)	0.030	(24)	0.033	0.027
1 $\Delta$ - $\Delta\Delta$	0.001	(1)	0.001	(0)	0.001	0.000
1 $\Delta$	0.048	(38)	0.043	(34)	0.043	0.039
1N + 1 $\Delta$	1.179	(938)	1.190	(946)	0.999	1.020
2N	0.006	(5)	-0.020	(-16)	0.008	-0.018
total	1.185	(943)	1.170	(931)	1.007	1.002

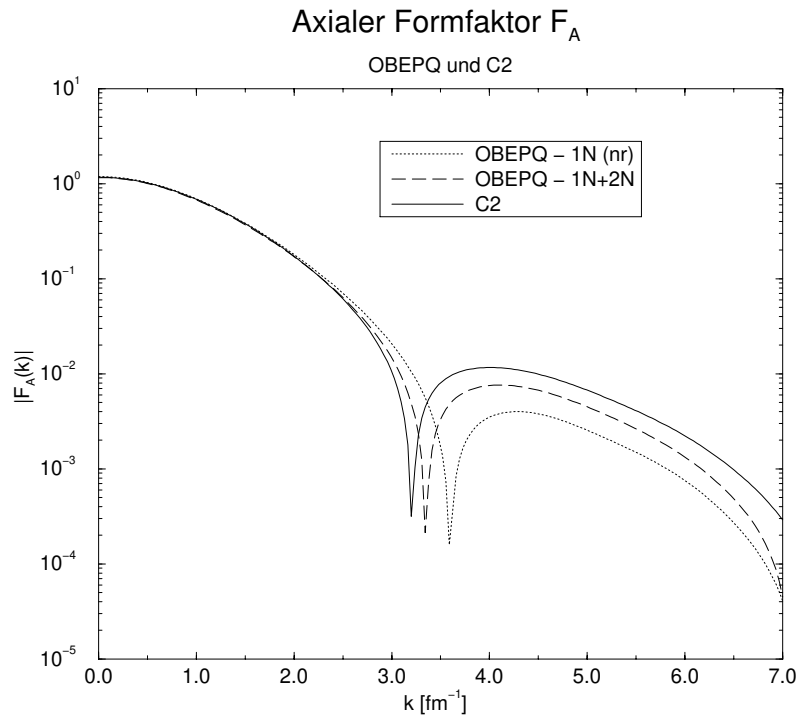
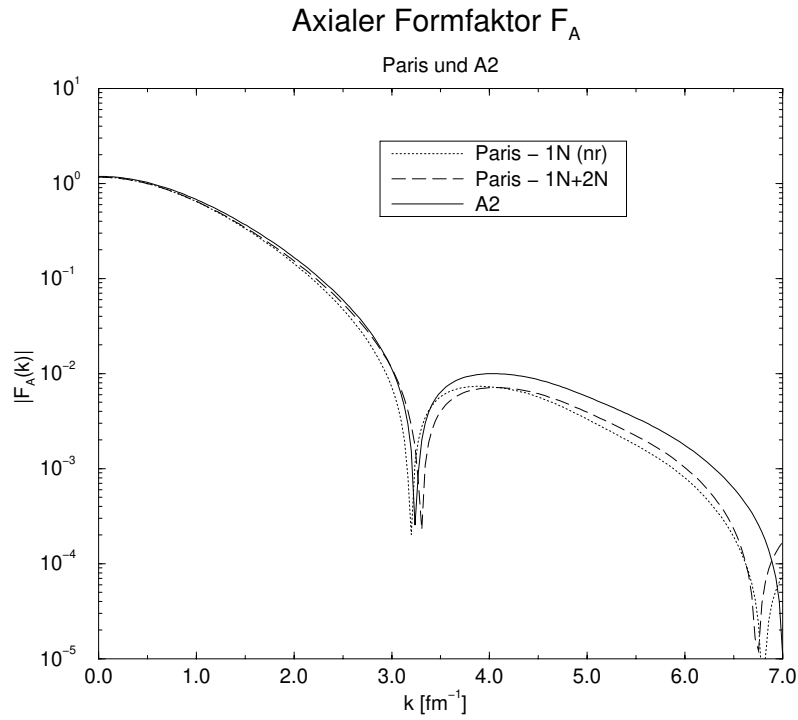


**Tabelle 6.5:** Resultate für das Gamow-Teller Matrix Element für die verschiedenen Kraftmodelle. In den Klammern steht das Verhältnis von theoretischem und experimentellem Wert.

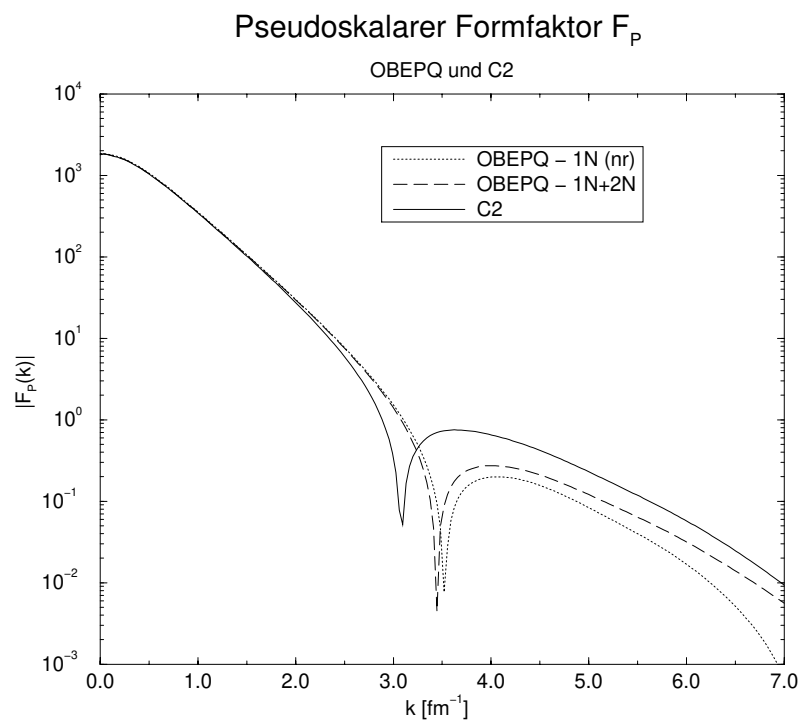
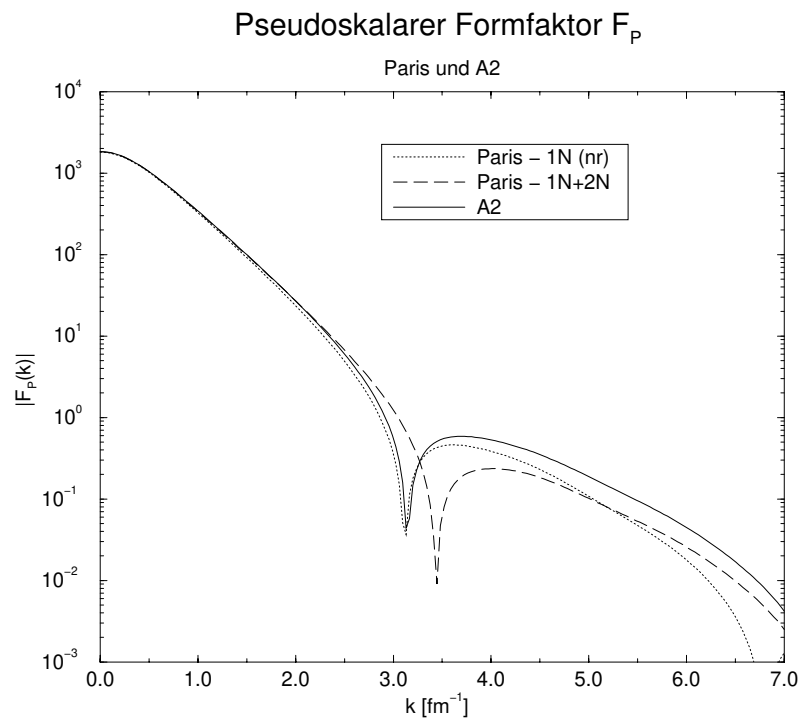
$M(GT) \times 1000$	Paris	A2	OBEPQ	C2
IA	920 (95.7%)	938 (97.6%)	937 (97.5%)	946 (98.4%)
total	925 (96.3%)	943 (98.1%)	921 (95.8%)	931 (96.9%)
Experiment	$961 \pm 3$			

In Abbildung 6.1 sind die theoretischen Vorhersagen für den axialen Formfaktor  $F_A$  über einen weiten Bereich von Impulsüberträgen dargestellt. Man erkennt, daß die Einflüsse der Korrekturen für die Paris/A2-Rechnung im gesamten Bereich relativ klein bleiben. In der OBEPQ/C2-Rechnung sind die Korrekturen größer und führen zu einer Verschiebung des Minimums. Anhand der dargestellten Verläufe erkennt man auch, daß die in der Impulsapproximation bestehenden Unterschiede zwischen der Paris und OBEPQ-Rechnung durch die Mitberücksichtigung der Korrekturen reduziert werden.

In Abbildung 6.2 sind die entsprechenden Vorhersagen für den induzierten pseudoskalaren Formfaktor  $F_P$  dargestellt. Auch hier ist der Einfluß der Korrekturen relativ gering und die Resultate für die verschiedenen Kraftmodelle sehen ziemlich ähnlich aus.



**Abbildung 6.1:** Resultate für den axialen Formfaktor  $F_A(k_\mu^2)$  für die verschiedenen Kraftmodelle.



**Abbildung 6.2:** Resultate für den induzierten pseudoskalaren Formfaktor  $F_P(k_\mu^2)$  für die verschiedenen Kraftmodelle.

### 6.3 Effektive Kopplungen und Zerfallsrate

In diesem Abschnitt präsentieren wir die Resultate für die “elastische” Myon-Einfang Reaktion  $\mu + {}^3\text{He} \longrightarrow \nu_\mu + {}^3\text{H}$ . In den Tabellen 6.6 - 6.9 sind die Ergebnisse für die unpolarisierte Zerfallsrate  $\Gamma_0$  und die Polarisationsobservablen  $A_v$ ,  $A_t$  und  $A_\Delta$  angegeben. Polarisationsexperimente sind zwar versucht wurden [19], es konnte aber noch keine hinreichende experimentelle Genauigkeit erzielt werden. Daher wollen wir an dieser Stelle nur darauf hinweisen, daß bei der Polarisationsobservablen  $A_\Delta$  die Unterschiede zwischen den verschiedenen Kraftmodellen am größten sind, und uns im folgenden auf die Diskussion des Resultats für die unpolarisierte Zerfallsrate  $\Gamma_0$  beschränken.

Wir erkennen, daß die rein-nukleonische Impulsapproximation den experimentellen Wert deutlich unterschätzt, beim Paris-Potential um  $\approx 15.5\%$  und beim OBEPQ-Potential um  $\approx 10\%$ . Die Berücksichtigung von Zweinukleonen-Strömen und  $\Delta$ -Isobar-Strömen reduziert den Unterschied zwischen beiden Modellen und führt zu einer Verringerung dieser Diskrepanzen. Trotzdem unterschätzen auch die vollen Rechnungen mit den erweiterten Kraftmodellen A2 und C2 das experimentelle Resultat noch um  $\approx 6.5\%$ .

$\Gamma_0 [s^{-1}]$	Paris	A2	OBEPQ	C2
IA	1263 (84.4%)	1328 (88.7%)	1348 (90.1%)	1378 (92.1%)
total	1328 (88.8%)	1399 (93.5%)	1365 (91.2%)	1399 (93.5%)
Experiment	$1496 \pm 4$			

$A_v$	Paris	A2	OBEPQ	C2
IA	0.569	0.563	0.561	0.559
total	0.541	0.534	0.544	0.541

$A_t$	Paris	A2	OBEPQ	C2
IA	-0.355	-0.349	-0.357	-0.351
total	-0.373	-0.367	-0.373	-0.368

$A_\Delta$	Paris	A2	OBEPQ	C2
IA	-0.076	-0.088	-0.082	-0.090
total	-0.086	-0.098	-0.082	-0.091

**Tabellen 6.6 - 6.9:** Die unpolarisierte Zerfallsrate und die Polarisationsobservablen der Myon-Einfang Reaktion für die verschiedenen Kraftmodelle. In den Klammern ist das Verhältnis von theoretischer zu experimenteller Zerfallsrate in % angegeben.

Im Gegensatz dazu ist die vergleichbare Rechnung von Congleton und Truhlík [14] in sehr guter Übereinstimmung mit dem Experiment. Um zu verstehen, woher diese Unterschiede kommen, betrachten wir unsere Resultate im Detail.

In den Tabellen 6.10 und 6.11 sind die Resultate für die in Kapitel 2 definierten effektiven Kopplungen  $G_V$ ,  $G_A$  und  $G_P$  angegeben. Sie bestimmen die unpolarisierte Zerfallsrate  $\Gamma_0$  gemäß (2.12).  $G_V$  wird bestimmt durch die vektorielle Ladung  $\rho_V(\vec{k})$ ,  $G_A$  und  $G_P$  sind gegeben durch die räumlichen Stromanteile  $\vec{j}_V(\vec{k})$  und  $\vec{j}_A(\vec{k})$ . An dieser Stelle wollen wir darauf hinweisen, daß sich die Zerfallsrate (2.12) aus einem Zusammenspiel von vektoriell und axialem Anteil ergibt. Beide Anteile müssen berücksichtigt werden, damit sich für  $\Gamma_0$  ein realistischer Wert ergibt. In der vollen A2 Rechnung ergibt beispielsweise die alleinige Berücksichtigung des vektoriellen Stroms  $\rho_V(\vec{k})$  und  $\vec{j}_V(\vec{k})$  lediglich  $\Gamma_0(V) = 262 \text{ s}^{-1}$ . Mit dem axialen Strom  $\vec{j}_A(\vec{k})$  allein erhält man  $\Gamma_0(A) = 819 \text{ s}^{-1}$ . Erst beide Anteile zusammen liefern nicht-additiv mit  $\Gamma_0(V + A) = 1399 \text{ s}^{-1}$  einen Wert, der in der Nähe des experimentellen Resultats liegt.

	$G_V$		$G_A$		$G_P$			
Beitrag	Paris	OBEPQ	Paris	OBEPQ	Paris		OBEPQ	
$\rho_V(1N)$	822.4	840.2						
$\vec{j}_V(1N)$			197.8	204.8	197.8		204.8	
$\vec{j}_A(1N)$			971.6	1007.1	316.0	(-53.3)	330.3	(-51.0)
1N	822.4	840.2	1169.4	1211.8	513.8	(144.5)	535.0	(153.8)
$\vec{j}_V(2N)$			34.1	31.8	34.1		31.8	
$\vec{j}_A(2N)$			7.7	-17.7	7.6	(10.6)	-4.1	(0.2)
2N			41.8	14.1	41.8	(44.7)	27.7	(32.0)
$\rho_V(\text{total})$	822.4	840.2						
$\vec{j}_V(\text{total})$			231.9	236.6	231.9		236.6	
$\vec{j}_A(\text{total})$			979.3	989.4	323.6	(-42.7)	326.1	(-50.8)
total	822.4	840.2	1211.2	1225.9	555.5	(189.2)	562.7	(185.8)

**Tabelle 6.10:** Ein- und Zweinukleonen-Beiträge zu den effektiven Kopplungen  $G_V$ ,  $G_A$  und  $G_P$ . In den Klammern sind die Beiträge zu  $G_P$  für  $f_p = 0$  angegeben.

**Tabelle 6.11:** Einnukleonen-, Zweinukleonen- und  $\Delta$ -Isobar-Beiträge zu den effektiven Kopplungen  $G_V$ ,  $G_A$  und  $G_P$ . In den Klammern sind die Beiträge zu  $G_P$  für  $f_p = 0$  angegeben.

	$G_V$		$G_A$		$G_P$			
Beitrag	A2	C2	A2	C2	A2		C2	
$\rho_V(1N)$	812.6	822.3						
$\vec{j}_V(1N)$			194.5	199.5	194.5		199.5	
$\vec{j}_A(1N)$			955.7	981.1	310.7	(-52.7)	321.1	(-50.7)
$1N$	812.6	822.3	1150.2	1180.6	505.2	(141.9)	520.6	(148.8)
$\rho_V(1\Delta)$	14.0	16.1						
$\vec{j}_V(1\Delta)$			8.6	7.7	8.6		7.7	
$\vec{j}_A(1\Delta)$			43.4	38.7	7.6	(-3.8)	6.7	(-4.0)
$1\Delta$	14.0	16.1	52.0	46.3	16.2	(4.9)	14.3	(3.7)
$\rho_V(1N + 1\Delta)$	826.6	838.4						
$\vec{j}_V(1N + 1\Delta)$			203.1	207.1	203.1		207.1	
$\vec{j}_A(1N + 1\Delta)$			999.1	1019.8	318.3	(-56.4)	327.8	(-54.7)
$1N + \Delta$	826.6	838.4	1202.2	1226.9	521.4	(146.7)	534.9	(152.5)
$\vec{j}_V(2N)$			34.5	31.6	34.5		31.6	
$\vec{j}_V(2\Delta)$			2.0	2.2	2.0		2.2	
$\vec{j}_A(2N)$			7.7	-17.7	7.6	(10.6)	-4.1	(0.2)
$2N + 2\Delta$			44.2	16.1	44.1	(47.1)	29.6	(34.0)
$\rho_V(\text{total})$	826.6	838.4						
$\vec{j}_V(\text{total})$			239.6	240.9	239.6		240.9	
$\vec{j}_A(\text{total})$			1006.8	1002.1	325.9	(-45.9)	323.6	(-54.4)
total	826.6	838.4	1246.4	1243.0	565.5	(193.8)	564.5	(186.5)

Nun wollen wir der Frage nachgehen, warum Referenz [14] eine bessere Beschreibung des experimentellen Werts für  $\Gamma_0$  erzielt als wir. In der IA ergeben sich in [14] die Werte  $G_V(\text{IA}) = 835$ ,  $G_A(\text{IA}) = 1185$  und  $G_P(\text{IA}) = 516$ , die volle Rechnung liefert die Werte  $G_V = 835$ ,  $G_A = 1300$  und  $G_P = 601$ . Die IA-Werte liegen zwischen unseren Resultaten der Paris und OBEPQ Rechnungen mit Einnukleonen-Strömen. Daraus schließen wir, daß sich die Abweichungen zwischen unserem Resultat und dem Resultat von Referenz [14] aus den Effekten von Zweinukleonen- und  $\Delta$ -Isobar-Strömen ergeben. Der höhere Wert von  $G_A$  ist entscheidend dafür, daß in Referenz [14] eine bessere Beschreibung der Zerfallsrate erreicht wird als in unserer Rechnung. Aus der Tabelle XI der Referenz [14] erkennt man, daß der  $\Delta$ -Isobar-Beitrag, der sich dort als Summe von ANP4, ANP5 und ANP6 ergibt, mit 48 und der vektorielle  $\pi$ -Kontakt-Strom VP1 mit 64 die Hauptkorrekturbeiträge zu  $G_A$  liefern.

Wenn wir in unseren Rechnungen den  $\Delta$ -Isobar-Effekt als Differenz zwischen den Resultaten von erweitertem Kraftmodell und nukleonischem Referenzmodell definieren, liefert das  $\Delta$ -Isobar für A2/Paris den Beitrag 35 zu  $G_A$ , für C2/OBEPQ ergibt sich 17. Der von uns erhaltene  $\Delta$ -Isobar-Effekt ist also kleiner als der von Referenz [14]. Dies ist nicht überraschend, da das  $\Delta$ -Isobar in Referenz [14] nicht als expliziter Freiheitsgrad in der Wellenfunktion behandelt wird, sondern effektiv in Zweinukleonen-Stromoperatoren berücksichtigt wird. In Referenz [21] wurde bereits festgestellt, daß eine solch perturbative Behandlung des  $\Delta$ -Isobars zu größeren Effekten führt als in der von uns verwendeten nicht-perturbativen Beschreibung.

In den Tabellen 6.12, 6.13 und 6.14 sind die einzelnen Strombeiträge zu den effektiven Kopplungen  $G_A$  und  $G_P$  aufgelistet. Der Effekt des  $\pi$ -Kontakt-Stroms zu  $G_A$  ist auch in unseren Rechnungen der dominante Zweikörper-Beitrag, jedoch liefert er mit  $\approx 35$  einen um fast einen Faktor 2 niedrigeren Beitrag zu  $G_A$  als in Referenz [14]. Der dort erzielte Wert 64 erscheint uns sehr groß, da er etwa 30% des vektoriellen Einkörperstrom-Beitrags ausmacht. Beim magnetischen Moment (Tabellen 5.3, 5.4 und 5.5) und beim vektoriellen Formfaktor  $F_M(-0.954m_\mu^2)$  (Tabelle 6.2) haben wir gesehen, daß gerade ein MEC-Effekt von etwa 15% nötig war, um eine gute Beschreibung der experimentellen Daten zu liefern. Folglich müßte Referenz [14] diese in der Elektronenstreuung gemessenen Größen deutlich schlechter beschreiben als wir.

**Tabelle 6.12:** Einnukleonen-, Zweinukleonen- und  $\Delta$ -Isobar-Beiträge des räumlichen vektoriellen Stroms zur effektiven Kopplung  $G_A$ . Die Beiträge zu  $G_P$  sind identisch.

Beitrag	$G_A$			
	Paris	A2	OBEPQ	C2
1N-Spin	198.1	194.8	205.1	199.8
1N-Konvektion	-0.3	-0.3	-0.3	-0.4
1N	197.8	194.5	204.8	199.5
1 $\Delta$ -indirekt		1.9		2.2
1 $\Delta$ -N $\Delta$		6.7		5.4
1 $\Delta$ - $\Delta\Delta$		0.0		0.0
1 $\Delta$		8.6		7.6
1N + 1 $\Delta$	197.8	203.1	204.8	207.1
2N- $\pi$ -Kontakt	34.3	34.6	36.8	36.3
2N- $\pi$ -Meson	-7.7	-7.8	-12.8	-12.3
2N- $\rho$ -Kontakt	4.6	4.6	5.4	5.2
2N- $\rho$ -Meson	1.7	1.7	1.1	1.1
2N- $\rho$ -Meson-tr	-0.8	-0.9	-0.4	-0.5
2N- $\omega\pi\gamma$	2.2	2.3	1.8	1.8
2N	34.1	34.5	31.8	31.6
2 $\Delta$ - $\pi$ -Kontakt-N $\Delta$ -NN $\gamma$		1.5		1.8
2 $\Delta$ - $\pi$ -Kontakt-N $\Delta$ -N $\Delta\gamma$		-0.5		-0.6
2 $\Delta$ - $\pi$ -Meson-N $\Delta$		0.5		0.5
2 $\Delta$ - $\rho$ -Kontakt-N $\Delta$ -NN $\gamma$		0.0		0.0
2 $\Delta$ - $\rho$ -Kontakt-N $\Delta$ -N $\Delta\gamma$		0.0		0.0
2 $\Delta$ - $\rho$ -Meson-N $\Delta$		0.0		0.0
2 $\Delta$ - $\rho$ -Meson-tr-N $\Delta$		0.0		-0.1
2 $\Delta$ - $\omega\pi\gamma$ -N $\Delta$		0.6		0.6
2 $\Delta$		2.0		2.2
2N + 2 $\Delta$	34.1	36.5	31.8	33.8
total	231.9	239.6	236.6	240.9



**Tabellen 6.13 und 6.14:** Einnukleonen-, Zweinukleonen- und  $\Delta$ -Isobar-Beiträge vom räumlichen axialen Strom zu den effektiven Kopplungen  $G_A$  und  $G_P$ . Für Operatoren, die vom pseudoskalaren nukleonischen Formfaktor  $f_P$  abhängen, sind in den Klammern die Beiträge zu  $G_P$  für  $f_P = 0$  angegeben.

	$G_A$		$G_P$ ( $G_P(f_P = 0)$ )	
Beitrag	Paris	OBEPQ	Paris	OBEPQ
1N-nr	978.9	1013.6	317.5 (−55.1)	331.4 (−52.9)
1N-rc	−7.3	−6.6	−1.5 (1.8)	−1.2 (1.9)
1N	971.6	1007.1	316.0 (−53.3)	330.3 (−51.0)
2N- $\rho\pi$ -direkt	13.8	1.4	1.9	1.7
2N- $\rho\pi$ - $\pi$ -Pol			8.6	−0.2
2N-A1-Pol	13.7	1.4	1.8	1.7
2N-non-Born	27.6	2.8	12.2	3.2
2N- $\pi$ -Vertex	−19.9	−15.5	−9.0 (−2.9)	−7.8 (−3.4)
2N- $\pi$ -ps-pv	9.7		4.0 (0.8)	
2N- $\pi$ -Retardierung	−9.6	−5.1	0.4	0.4
2N-Born	−19.9	−20.5	−4.6 (−1.7)	−7.4 (−3.0)
2N	7.7	−17.7	7.6 (10.6)	−4.1 (0.2)
total	979.3	989.4	323.6 (−42.7)	326.1 (−50.8)

	$G_A$		$G_P$ ( $G_P(f_P = 0)$ )	
Beitrag	A2	C2	A2	C2
1N	955.7	981.1	310.7 (−52.7)	321.1 (−50.7)
1 $\Delta$ -indirekt	9.5	11.0	3.3 (−0.2)	3.9 (−0.2)
1 $\Delta$ -N $\Delta$	33.3	27.2	4.2 (−3.5)	2.8 (−3.7)
1 $\Delta$ - $\Delta\Delta$	0.6	0.5	0.1 (−0.1)	0.0 (−0.1)
1 $\Delta$	43.4	38.7	7.6 (−3.8)	6.7 (−4.0)
1N + 1 $\Delta$	999.1	1019.8	318.3 (−56.4)	327.8 (−54.7)
2N	7.7	−17.7	7.6 (10.6)	−4.1 (0.2)
total	1006.8	1002.1	325.9 (−45.9)	323.6 (−54.4)

## 6.4 Extraktion von $f_P$

In den in Abschnitt 6.3 präsentierten Resultaten haben wir stets den sich aus der PCAC Relation ergebenden Formfaktor

$$f_P^{\text{PCAC}}(k_\mu^2) = \frac{4m^2}{m_\pi^2 - k_\mu^2} f_A(k_\mu^2)$$

verwendet. Die vollen Rechnungen mit den Kraftmodellen A2 und C2 unterschätzen bei Benutzung des PCAC Wertes  $f_P^{\text{PCAC}}(-0.954m_\mu^2) = 146.7 = 8.25 \frac{2m}{m_\mu}$  die experimentelle Zerfallsrate der Myon-Einfang Reaktion um 6.5%.

Es stellt sich die Frage, ob durch Variation von  $f_P$  gegenüber dem PCAC Wert eine gute Übereinstimmung mit dem experimentellen Resultat erzielt werden kann. In Abbildung 6.3 ist die Zerfallsrate als Funktion von  $f_P/f_P^{\text{PCAC}}$  dargestellt. Die Kurven für die erweiterten Kraftmodelle A2 und C2 liegen sehr dicht beieinander. Für den Wert

$$f_P \approx 0.5 f_P^{\text{PCAC}}$$

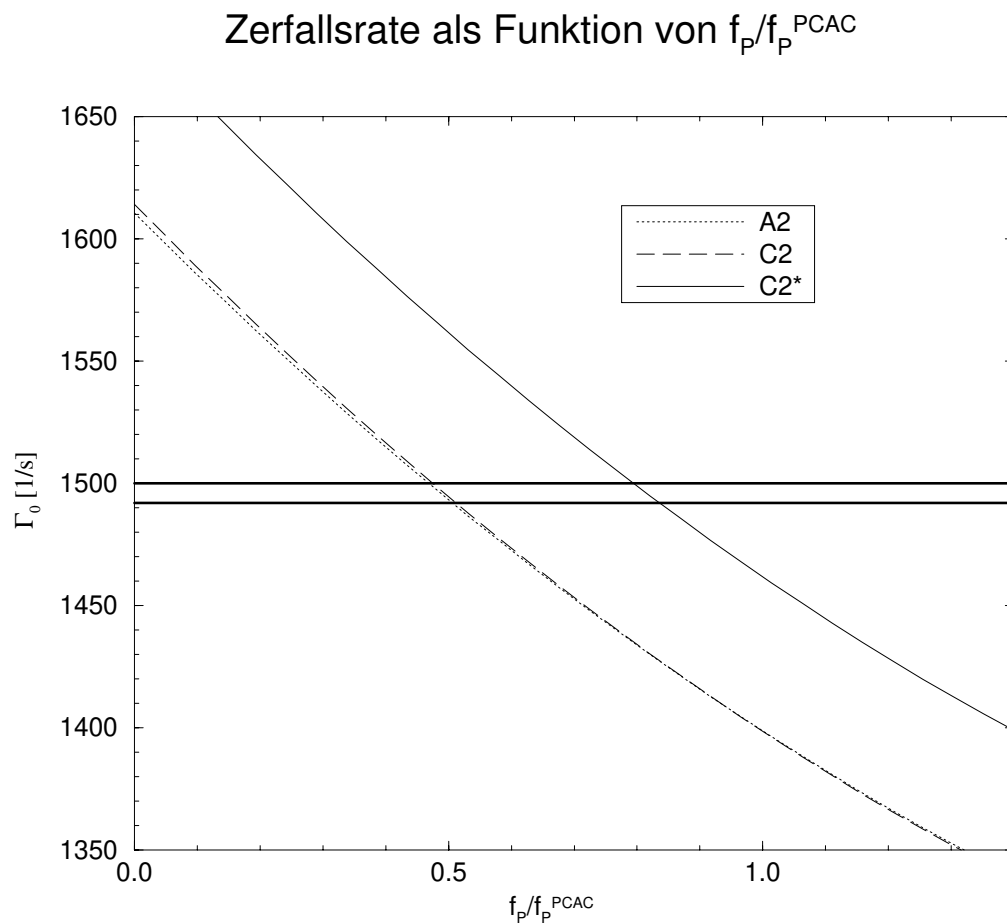
sind wir in der Lage, die experimentelle Zerfallsrate zu reproduzieren. Aus alleiniger Betrachtung des Myon-Einfangs würde man somit schließen, daß der tatsächliche Wert von  $f_P$  deutlich unter dem PCAC Wert liegt.

Bei unseren Untersuchungen des  $\beta$ -Zerfalls von  $^3\text{H}$  in Abschnitt 6.2 haben wir allerdings gesehen, daß bereits ein Problem bei der Beschreibung des von  $f_P$  unabhängigen Anteils des axialen Stroms besteht. Die volle A2 Rechnung unterschätzt den Wert des axialen Formfaktors  $F_A(0)$  um 2%, die volle C2 Rechnung sogar um 3%. Desweiteren haben wir festgestellt, daß die A2 Rechnung den experimentellen vektoriellen Formfaktor  $F_V(-0.954m_\mu^2)$  um etwa 1.5% unterschätzt.

Aufgrund dieser Problematik haben wir bei der C2 Rechnung, die  $F_V$  und  $F_M$  bei  $k_\mu^2 = -0.954m_\mu^2$  sehr gut beschreibt, den axialen Formfaktor  $F_A(-0.954m_\mu^2)$  künstlich um 3% erhöht. Hieraus ergibt sich die Zerfallsrate  $\Gamma_0 = 1462 \text{ s}^{-1}$ , die nur noch 2.3% unter dem experimentellen Wert liegt. Der aus dieser künstlichen Rechnung sich ergebende Wert für  $f_P$  ist

$$f_P \approx 0.8 f_P^{\text{PCAC}}$$

und liegt deutlich näher am PCAC Wert. Diese Betrachtung zeigt, daß es trotz der hohen experimentellen Präzision, mit der die unpolarisierte Zerfallsrate  $\Gamma_0$  gemessen wurde, schwierig ist, einen eindeutigen Wert für  $f_P$  zu extrahieren. Um klarere Aussagen zu machen, wäre es wünschenswert, auch präzise experimentelle Werte für die Polarisationsobservablen  $A_v$ ,  $A_t$  und  $A_\Delta$  vorliegen zu haben.



**Abbildung 6.3:** Die unpolarisierte Zerfallsrate  $\Gamma_0$  der Myon-Einfang Reaktion in Abhängigkeit vom nukleonischen Formfaktor  $f_P$  für die Kraftmodelle A2 und C2. Die Kurve C2\* entspricht dem C2 Resultat mit einem künstlich um 3% erhöhten axialen Formfaktor  $F_A$ . Die horizontalen Linien stellen die obere und untere experimentelle Schranke dar.



# Kapitel 7

## Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit ist die “elastische” Myon-Einfang Reaktion am  ${}^3\text{He}$ -Kern,  $\mu^- + {}^3\text{He} \longrightarrow \nu_\mu + {}^3\text{H}$ , untersucht worden. Zur Berechnung der Zerfallsrate sind realistische Dreiteilchen-Wellenfunktionen benutzt worden, die in früheren Arbeiten als numerische Lösungen der Faddeev-Gleichungen bestimmt wurden. Die sich für das Paris-Potential und das Bonn OBEPQ Potential sowie für die dazu erweiterten Kraftmodelle A2 und C2 ergebenden Wellenfunktionen sind in dieser Arbeit übernommen worden. Die A2- und C2-Wellenfunktionen enthalten das  $\Delta$ -Isobar als expliziten Freiheitsgrad. Als schwache Stromoperatoren sind neben Einnukleonen-Strömen auch Zweinukleonen-Ströme und  $\Delta$ -Isobar-Ströme berücksichtigt worden.

Durch Vergleich der Resultate für die verschiedenen Kraftmodelle konnte die Modellabhängigkeit untersucht werden. Hierbei hat sich erfreulicherweise gezeigt, daß die in der Impulsapproximation bestehenden Unterschiede durch die Hinzunahme von Zweinukleonen- und  $\Delta$ -Isobar-Korrekturen erheblich reduziert werden. Während in der rein-nukleonischen Impulsapproximation zwischen den Resultaten zwischen Paris und OBEPQ ein Unterschied von fast 6% besteht, stimmen die vollen Rechnungen mit den Kraftmodellen A2 und C2 bis auf 0.1% überein.

Die Mitberücksichtigung von Zweinukleonen- und  $\Delta$ -Isobar-Korrekturen hat zu einer Erhöhung der Zerfallsrate und zu einer Verringerung der Diskrepanz zwischen Theorie und Experiment geführt. Trotzdem unterschätzen die theoretischen Vorhersagen für die Kraftmodelle A2 und C2 die experimentelle Zerfallsrate noch um 6.5 %. Im Gegensatz dazu ist die vergleichbare Rechnung von Ref. [14] in sehr guter Übereinstimmung mit dem Experiment. Für die Unterschiede gibt es zwei wesentliche Gründe. Zum einen wird das  $\Delta$ -Isobar in Ref. [14] perturbativ behandelt. Dies führt erfahrungsgemäß zu einem größeren Effekt als in der in dieser Arbeit verwendeten nicht-perturbativen Behandlung [21]. Zum anderen ist der Beitrag des dominanten vektoriellen  $\pi$ -Kontakt-Austauschstroms in Ref. [14] um etwa einen Faktor 2 größer als bei uns, was in Ref. [14] zu einer schlechten Beschreibung des isovektoriellen magnetischen Moments führen müßte.

In den vorgestellten Resultaten wurde für den induzierten pseudoskalaren nukleonischen Formfaktor  $f_P$  der sich aus der PCAC Relation ergebende Wert genommen. Aus der alleinigen Betrachtung der "elastischen" Myon-Einfang Reaktion könnte man schließen, daß der tatsächliche Wert von  $f_P$  um 50% reduziert ist, da man mit diesem Wert die experimentelle Zerfallsrate mit den Kraftmodellen A2 und C2 reproduzieren könnte. Durch die gleichzeitige Betrachtung der Resultate für den  $\beta$ -Zerfall von  ${}^3\text{H}$  haben wir erkannt, daß bereits der in dieser Reaktion gemessene axiale Formfaktor  $F_A$  bei verschwindendem Impulsübertrag von der Theorie um 2–3% unterschätzt wird. Somit besteht bereits ein Problem in der Beschreibung des von  $f_P$  unabhängigen Anteil des axialen Stroms. Eine künstliche Erhöhung von  $F_A$  um diese 2–3% beim Impulsübertrag des Myon-Einfangs würde die Diskrepanz in der Zerfallsrate von 6.5% auf 2–3% reduzieren und somit auf einen Wert von  $f_P$  schließen lassen, der 80% des PCAC-Werts ausmachen würde. Diese Betrachtungen zeigen, daß es trotz der hohen experimentellen Präzision, mit der unpolarisierter Myon-Einfang am  ${}^3\text{He}$ -Kern vermessen wurde, sehr schwierig ist, einen eindeutigen Wert für die nukleonische Größe  $f_P$  zu extrahieren.

Aus dem soeben geschilderten Sachverhalt wird erkennbar, daß es nicht ausreicht, aufgrund von nur einer Reaktion definitive Aussagen über die Güte von theoretischen Modellen machen zu können. Vielmehr ist hierzu eine Vielzahl verschiedener Reaktionen notwendig. Dies ist einer der Gründe, warum in dieser Arbeit auch elastische Elektronenstreuung am gebundenen Dreinukleonen-System untersucht worden ist. Insbesondere erfolgte eine vollständige Neuberechnung der magnetischen Formfaktoren von  ${}^3\text{He}$  und  ${}^3\text{H}$ . Die volle Rechnung mit dem A2-Potential liefert im gesamten Impulsübertrags-Bereich von  $0\text{--}7\text{ fm}^{-1}$  eine sehr gute Beschreibung der experimentellen Daten. Die Beschreibung mit dem C2-Potential ist hingegen schlechter. Während bei kleinen Impulsüberträgen die Beschreibung noch gut ist, tritt ab etwa  $2\text{ fm}^{-1}$  eine deutliche Überschätzung der experimentell gemessenen Formfaktoren auf. Die vorhergesagten Minima liegen bei zu großen Impulsüberträgen.

Einen Schwerpunkt in dieser Arbeit bildete die Entwicklung eines Formalismus zur Berechnung des nuklearen Strommatrixelements. Die in dieser Arbeit präsentierten Resultate können als erste Anwendungen dieses Formalismus betrachtet werden. Weitere sich eröffnende Anwendungsgebiete sind elektroschwache Aufbruchreaktionen wie z.B. die Photodisintegration  $\gamma + {}^3\text{He} \rightarrow d + p$  oder die Myon-Einfang Reaktion  $\mu + {}^3\text{He} \rightarrow \nu_\mu + d + n$ . Das Observablen-Konzept für diese Reaktionen ist bereits entwickelt worden [36]. Die im Rahmen dieser Arbeit erstellten numerischen Programme stellen das Strommatrixelement in einer Form bereit, so daß es direkt zur Beschreibung dieser Reaktionen übernommen werden kann. Da in einem parallelen Projekt in der Kerntheoriegruppe Hannover kürzlich die  $Nd$ -Streuwellenfunktionen berechnet worden sind [33, 34], liegen die beiden wesentlichen Bausteine zur vollständigen Beschreibung der erwähnten Reaktionen vor und sind in zukünftigen Arbeiten nur noch zusammenzufügen.

# Anhang A

## Tensoroperatorformalismus

Der in diesem Anhang dargestellte Tensoroperatorformalismus bildet die Grundlage für die in Kapitel 4 beschriebene Berechnung des schwachen nuklearen Stroms. Die angegebenen Definitionen und Formeln sind größtenteils den Referenzen [27] und [24] entnommen und dort ausführlich diskutiert. An dieser Stelle beschränken wir uns daher im wesentlichen auf eine Auflistung der in dieser Arbeit explizit verwendeten Formeln.

### A.1 Irreduzibler Tensoroperator und Tensorprodukt

#### Definition des irreduziblen Tensoroperators

Ein irreduzibler Tensoroperator  $A^{(j)}$  ist definiert über die Kommutatorrelationen seiner Komponenten mit dem Drehimpulsoperator  $\vec{J}$ ,

$$[\vec{J}, A_{m_j}^{(j)}] = \sum_{m_{j'}} \langle jm_{j'} | \vec{J} | jm_j \rangle A_{m_{j'}}^{(j)}. \quad (\text{A.1})$$

Ein Beispiel für einen irreduziblen Tensoroperator vom Rang 0 ist der Hamiltonoperator mit rotationsinvariantem Potential,  $H = \vec{p}^2/2m + V$ . Beispiele für irreduzible Tensoroperatoren vom Rang 1 sind der Impulsoperator  $\vec{p}$  und der Ortsoperator  $\vec{r}$ . Der nicht-relativistische Ladungsoperator  $\rho(\vec{k}) = e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}$  hingegen ist kein irreduzibler Tensoroperator, da er von dem äußeren Parameter  $\vec{k}$  abhängt und modifiziertes Transformationsverhalten unter Drehungen besitzt. Mit Hilfe der Formel (4.6) entwickeln wir ihn in eine unendliche Reihe von irreduziblen Tensoroperatoren verschiedener Ränge, den sogenannten Multipoloperatoren.

Wigner-Eckart Theorem (für irreduzible Tensoroperatoren)

$$\langle J' m_{J'} | A_{m_j}^{(j)} | J m_J \rangle = (-)^{J'-m_{J'}} \begin{pmatrix} J' & j & J \\ -m_{J'} & m_j & m_J \end{pmatrix} \langle J' || A^{(j)} || J \rangle \quad (\text{A.2})$$

Das hierdurch definierte reduzierte Matricelement  $\langle J' || A^{(j)} || J \rangle$  hängt nicht mehr von den Projektionsquantenzahlen  $m_{J'}$ ,  $m_j$  und  $m_J$  ab. Aus dem Wigner-Eckart Theorem ergeben sich aufgrund der Eigenschaften des 3j-Symbols die Auswahlregeln  $m_j = m_{J'} - m_J$  und  $|J' - J| \leq j \leq J' + J$ .

Definition des Tensorprodukts

$$\{A^{(a)} \otimes B^{(b)}\}_{m_c}^{(c)} = \sum_{m_a m_b} \langle a m_a b m_b | c m_c \rangle A_{m_a}^{(a)} B_{m_b}^{(b)} \quad (\text{A.3})$$

Spezialfall :

$$\{A^{(a)} \otimes B^{(a)}\}_{m_c}^{(0)} = \frac{1}{\hat{a}} \sum_{m_a} (-)^{a-m_a} A_{m_a}^{(a)} B_{-m_a}^{(a)} \quad (\text{A.4})$$

Symmetrie :

$$\{A^{(a)} \otimes B^{(b)}\}_{m_c}^{(c)} = (-)^{a+b+c} \{B^{(b)} \otimes A^{(a)}\}_{m_c}^{(c)} \quad (\text{A.5})$$

Entkopplungsformel

$$\begin{aligned} & \langle (J'_1 J'_2) J' | \{A_1^{(j_1)} \otimes A_2^{(j_2)}\}^{(j)} | (J_1 J_2) J \rangle \\ &= \hat{J}' \hat{J}_j \begin{Bmatrix} J'_1 & J_1 & j_1 \\ J'_2 & J_2 & j_2 \\ J' & J & j \end{Bmatrix} \langle J'_1 || A^{(j_1)} || J_1 \rangle \langle J'_2 || A^{(j_2)} || J_2 \rangle \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Sphärische und karthesische Basisvektoren

$$e_\lambda^{(1)} = \begin{cases} e_z & \text{für } \lambda = 0 \\ \mp \frac{1}{\sqrt{2}} (e_x \pm i e_y) & \text{für } \lambda = \pm 1 \end{cases} \quad (\text{A.7})$$

Darstellung eines Vektors in sphärischer Basis:

$$\vec{A} = \sum_\lambda A_\lambda^{(1)} e_\lambda^{(1)*} \quad \text{mit} \quad A_\lambda^{(1)} = \begin{cases} A_z & \text{für } \lambda = 0 \\ \mp \frac{1}{\sqrt{2}} (A_x \pm i A_y) & \text{für } \lambda = \pm 1 \end{cases} \quad (\text{A.8})$$

Zusammenhang mit Skalar - und Vektorprodukt:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = -\sqrt{3} \{A^{(1)} \otimes B^{(1)}\}_0^{(0)} \quad (\text{A.9a})$$

$$i(\vec{A} \times \vec{B})_\lambda = \sqrt{2} \{A^{(1)} \otimes B^{(1)}\}_\lambda^{(1)} \quad (\text{A.9b})$$



## A.2 Eigenschaften von Wigner-Symbolen

Definition von 3j Symbol über Clebsch-Gordan-Koeffizient

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} = (-)^{j_1-j_2-m_3} \frac{1}{\hat{j}_3} \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j_3 - m_3 \rangle \quad (\text{A.10})$$

Spezielle Wigner-Symbole

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & 0 \\ m_1 & -m_2 & 0 \end{pmatrix} = (-)^{j_1-m_1} \frac{1}{\hat{j}_1} \delta_{j_1, j_2} \delta_{m_1, m_2} \quad (\text{A.11})$$

$$\begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ 0 & j'_3 & j'_2 \end{Bmatrix} = (-)^{j_1+j_2+j_3} \frac{1}{\hat{j}_2 \hat{j}_3} \delta_{j_2, j'_2} \delta_{j_3, j'_3} \quad (\text{A.12})$$

$$\begin{Bmatrix} a & b & e \\ c & d & e' \\ f & f' & 0 \end{Bmatrix} = (-)^{b+c+e+f} \frac{1}{\hat{e} \hat{f}} \begin{Bmatrix} a & b & e \\ d & c & f \end{Bmatrix} \delta_{e, e'} \delta_{f, f'} \quad (\text{A.13})$$

## A.3 Umkopplungsformeln

$$\begin{aligned} & \left\{ A^{(a)} \otimes [B^{(b)} \otimes C^{(c)}]^{(d)} \right\}_{m_e}^{(e)} \\ &= \sum_f \hat{d} \hat{f} (-)^{a+b+c+e} \begin{Bmatrix} b & c & d \\ e & a & f \end{Bmatrix} \left\{ [A^{(a)} \otimes B^{(b)}]^{(f)} \otimes C^{(c)} \right\}_{m_e}^{(e)} \end{aligned} \quad (\text{A.14a})$$

$$\begin{aligned} & \left\{ [A^{(a)} \otimes B^{(b)}]^{(f)} \otimes C^{(c)} \right\}_{m_e}^{(e)} \\ &= \sum_d \hat{d} \hat{f} (-)^{a+b+c+e} \begin{Bmatrix} b & a & f \\ e & c & d \end{Bmatrix} \left\{ A^{(a)} \otimes [B^{(b)} \otimes C^{(c)}]^{(d)} \right\}_{m_e}^{(e)} \end{aligned} \quad (\text{A.14b})$$

$$\begin{aligned} & \left\{ [A^{(a)} \otimes B^{(b)}]^{(c)} \otimes [D^{(d)} \otimes E^{(e)}]^{(f)} \right\}_{m_g}^{(g)} \\ &= \sum_{jk} \hat{c} \hat{f} \hat{j} \hat{k} \begin{Bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ j & k & g \end{Bmatrix} \left\{ [A^{(a)} \otimes D^{(d)}]^{(j)} \otimes [B^{(b)} \otimes E^{(e)}]^{(k)} \right\}_{m_g}^{(g)} \end{aligned} \quad (\text{A.15a})$$

$$\begin{aligned} & \left\{ [A^{(a)} \otimes B^{(a)}]^{(0)} \otimes [D^{(d)} \otimes E^{(d)}]^{(0)} \right\}^{(0)} \\ &= \sum_j \frac{\hat{j}}{\hat{a} \hat{d}} \left\{ [A^{(a)} \otimes D^{(d)}]^{(j)} \otimes [B^{(a)} \otimes E^{(d)}]^{(j)} \right\}^{(0)} \end{aligned} \quad (\text{A.15b})$$

## A.4 Eigenschaften von Kugelfunktionen

### Orthogonalität und Vollständigkeit der Legendre-Polynome

$$\int_{-1}^1 du P_{l'}(u) P_l(u) = \frac{2}{2l+1} \delta_{l',l} \quad (\text{A.16})$$

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{2} P_l(u') P_l(u) = \delta(u' - u) \quad (\text{A.17})$$

### Orthogonalität und Vollständigkeit der Kugelfunktionen

$$\int d^2\hat{p} Y_{m_{l'}}^{(l')*}(\hat{p}) Y_{m_l}^{(l)}(\hat{p}) = \delta_{l',l} \delta_{m_{l'},m_l} \quad (\text{A.18})$$

$$\sum_{lm_l} Y_{m_l}^{(l)}(\hat{p}) Y_{m_l}^{(l)*}(\hat{p}') = \delta^{(2)}(\hat{p}' - \hat{p}) \quad (\text{A.19})$$

### Entwicklung einer Winkelabhängigkeit der Form $u_p = \hat{p}' \cdot \hat{p}$

$$f(u_p) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) f_l P_l(u_p) = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \hat{l}(-)^l f_l \left( Y^{(l)}(\hat{p}') \otimes Y^{(l)}(\hat{p}) \right)^{(0)} \quad (\text{A.20})$$

mit  $f_l = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 du_p f(u_p) P_l(u_p)$ .

#### Darstellungen der $\delta$ -Funktion

Setzen wir in (A.20)  $f_l = 1$  so ergibt sich,

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) P_l(u_p) &= 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \hat{l}(-)^l \left( Y^{(l)}(\hat{p}') \otimes Y^{(l)}(\hat{p}) \right)^{(0)} \\ &= 4\pi \sum_{lm_l} Y_{m_l}^{(l)*}(\hat{p}') Y_{m_l}^{(l)}(\hat{p}) \\ &= 4\pi \delta^{(2)}(\hat{p}' - \hat{p}). \end{aligned}$$

Im vorletzten Schritt haben wir die Eigenschaft  $Y_{m_l}^{(l)*}(\hat{p}) = (-)^{m_l} Y_{-m_l}^{(l)}(\hat{p})$  benutzt. Nun können wir die folgenden Darstellungen der  $\delta$ -Funktion ablesen,

$$\delta^{(2)}(\hat{p}' - \hat{p}) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{4\pi} P_l(u_p) = \sum_{l=0}^{\infty} \hat{l}(-)^l \left\{ Y^{(l)}(\hat{p}') \otimes Y^{(l)}(\hat{p}) \right\}^{(0)}. \quad (\text{A.21})$$

### Darstellung der sphärischen Komponenten eines Vektors durch Kugelfunktionen

$$p_{\lambda}^{(1)} = p \sqrt{\frac{4\pi}{3}} Y_{\lambda}^{(1)}(\hat{p}). \quad (\text{A.22})$$

Kopplungsformel für Kugelfunktionen

$$\left\{ Y^{(l_1)}(\hat{k}) \otimes Y^{(l_2)}(\hat{k}) \right\}_{m_l}^{(l)} = (-)^l \frac{\hat{l}_1 \hat{l}_2}{\sqrt{4\pi}} \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} Y_{m_l}^{(l)}(\hat{k}) \quad (\text{A.23})$$

Zerlegungsformel für Kugelfunktionen mit Argument  $\vec{p}_\pm = \vec{p}' \pm \vec{p}$ 

$$Y_{m_l}^{(l)}(\hat{p}_\pm) = \frac{1}{p_\pm^l} \sum_{\lambda=0}^l \left( \frac{4\pi}{2\lambda+1} \right)^{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 2l+1 \\ 2\lambda \end{pmatrix}^{\frac{1}{2}} p'^{l-\lambda} (\pm p)^\lambda \left\{ Y^{(l-\lambda)}(\hat{p}') \otimes Y^{(\lambda)}(\hat{p}) \right\}_{m_l}^{(l)} \quad (\text{A.24})$$

Partialwellen

$$\langle \vec{p}' | p l m_l \rangle = \frac{\delta(p' - p)}{p^2} Y_{m_l}^{(l)}(\hat{p}') \quad (\text{A.25})$$

Vektorkugelfunktionen

Definition:

$$\vec{Y}_{m_j}^{([l1]j)}(\hat{k}) = \sum_{m_l \lambda} \langle l m_l 1 \lambda | j m_j \rangle Y_{m_l}^{(l)}(\hat{k}) e_\lambda^{(1)} = \{ Y^{(l)}(\hat{k}) \otimes e^{(1)} \}_{m_j}^{(j)} \quad (\text{A.26})$$

Orthogonalität:

$$\int d^2 \hat{k} \vec{Y}_{m'_j}^{([l'1]j')*}(\hat{k}) \vec{Y}_{m_j}^{([l1]j)}(\hat{k}) = \delta_{j',j} \delta_{m_{j'},m_j} \delta_{l',l} \quad (\text{A.27})$$

Vollständigkeit:

$$\sum_{j m_j} \sum_{l=j-1, j, j+1} \left( \vec{Y}_{m_j}^{([l1]j)}(\hat{k}) \right)_\mu \left( \vec{Y}_{m_j}^{([l1]j)*}(\hat{k}') \right)_\nu = \delta_{\mu,\nu} \delta^{(2)}(\hat{k} - \hat{k}') \quad (\text{A.28})$$

## A.5 Formeln für die Herleitung in Anhang D

In diesem Abschnitt geben wir die Formeln an, die in der in Anhang D dargestellten Herleitung benutzt werden.

RK-Umkopplungsformel (D.1 , 1.Schritt)

Kombinieren wir die Formeln (A.14a) und (A.23), so erhalten wir

$$\begin{aligned} & \left\{ Y^{(I)}(\hat{k}) \otimes \left( Y^{(b)}(\hat{k}) \otimes A^{(e)} \right)^{(a)} \right\}^{(j)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \sum_{\kappa} RK(a, b, e, j, I; \kappa) \left\{ Y^{(\kappa)}(\hat{k}) \otimes A^{(e)} \right\}^{(j)} \end{aligned} \quad (\text{A.29})$$

mit der Umkopplungsfunktion

$$RK(a, b, e, j, I; \kappa) = (-)^{b+e+j+I+\kappa} \hat{a} \hat{b} \hat{I} \hat{\kappa} \begin{pmatrix} I & b & \kappa \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} b & e & a \\ j & I & \kappa \end{Bmatrix}.$$

Integrationsformeln (D.1 , 1. und 5. Schritt)

Mit Hilfe der Formeln (A.20), (A.15b), (A.23), (A.29) und unter Ausnutzung der Orthogonalität der Kugelfunktionen (A.18) und der Eigenschaften (A.11) und (A.12) der Wigner-Symbole, können wir das folgende Integral berechnen,

$$\begin{aligned} \int d^2\hat{k} f_p(v_p) f_q(v_q) Y_{m_\kappa}^{(\kappa)}(\hat{k}) &= (4\pi)^{\frac{3}{2}} \sum_{\varphi_p=0}^{\infty} \hat{\varphi}_p(-)^{\varphi_p} \sum_{\varphi_q=0}^{\infty} \hat{\varphi}_q(-)^{\varphi_q} f_{p,\varphi_p} f_{q,\varphi_q} \\ &\quad \begin{pmatrix} \varphi_p & \varphi_q & \kappa \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \left( Y^{(\varphi_p)}(\hat{p}_-) \otimes Y^{(\varphi_q)}(\hat{q}_-) \right)_{m_\kappa}^{(\kappa)} \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

mit den Entwicklungskoeffizienten

$$f_{p,\varphi_p} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 dv_p f(v_p) P_\varphi(v_p), \quad f_{q,\varphi_q} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 dv_q f(v_q) P_\varphi(v_q),$$

und den Winkeln  $v_p = \hat{k} \cdot \hat{p}_-$  und  $v_q = \hat{k} \cdot \hat{q}_-$ . Auf ähnliche Weise erhalten wir,

$$\begin{aligned} & \int d^2\hat{p}' \int d^2\hat{p} Y_{M_{L'}}^{(L')*}(\hat{p}') Y_{M_L}^{(L)}(\hat{p}) \left\{ Y^{(\alpha_1)}(\hat{p}') \otimes Y^{(\alpha_2)}(\hat{p}) \right\}_{m_{\gamma_p}}^{(\gamma_p)} F(u_p) \\ &= (-)^{L'-M_{L'}} \begin{pmatrix} L' & \gamma_p & L \\ -M_{L'} & m_{\gamma_p} & M_L \end{pmatrix} \sum_{\rho_p} RF(L', L, \alpha_1, \alpha_2, \gamma_p; \rho_p) F_{\rho_p} \end{aligned} \quad (\text{A.31})$$

mit der Umkopplungsfunktion

$$\begin{aligned} & RF(L', L, \alpha_1, \alpha_2, \gamma_p; \rho_p) \\ &= (-)^{\alpha_2+\gamma_p} \hat{L}' \hat{L} \hat{\alpha}_1 \hat{\alpha}_2 \hat{\gamma}_p \hat{\rho}_p^2 \begin{pmatrix} \rho_p & \alpha_1 & L' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_p & \alpha_2 & L \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \gamma_p \\ L & L' & \rho_p \end{Bmatrix}, \end{aligned}$$

den Entwicklungskoeffizienten  $F_{\rho_p} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 du_p F(u_p) P_{\rho_p}(u_p)$  und  $u_p = \hat{p}' \cdot \hat{p}$ .

Umkopplungsformel (D.1 , 5.Schritt)

Mit Hilfe der Zerlegungsformel (A.24), der Umkopplungsformel (A.15a) und der Kopplungsformel (A.23) erhalten wir

$$\begin{aligned}
 & \left\{ Y^{(c_{p+})}(\hat{p}_+) \otimes Y^{(c_{p-})}(\hat{p}_-) \right\}_{m_{c_p}}^{(c_p)} \\
 &= \sum_{\delta_{p_1}=0}^{c_{p+}} \sum_{\delta_{p_2}=0}^{c_{p-}} \sum_{\alpha_{p_1} \alpha_{p_2}} RP(c_{p+}, c_{p-}, c_p, \delta_{p_1}, \delta_{p_2}, \alpha_{p_1}, \alpha_{p_2}) p'^{c_{p+}+c_{p-}-\delta_{p_1}-\delta_{p_2}} p^{\delta_{p_1}+\delta_{p_2}} \\
 & \quad \frac{1}{p_+^{c_{p+}} p_-^{c_{p-}}} \left\{ Y^{(\alpha_{p_1})}(\hat{p}') \otimes Y^{(\alpha_{p_2})}(\hat{p}) \right\}_{m_{c_p}}^{(c_p)} \quad (A.32)
 \end{aligned}$$

mit der Umkopplungsfunktion

$$\begin{aligned}
 & RP(c_{p+}, c_{p-}, c_p, \delta_{p_1}, \delta_{p_2}, \alpha_{p_1}, \alpha_{p_2}) \\
 &= (-)^{\delta_{p_2}+\alpha_{p_1}+\alpha_{p_2}} \hat{c}_{p+} \hat{c}_{p-} \hat{\alpha}_{p_1} \hat{\alpha}_{p_2} (c_{p+} \widehat{-} \delta_{p_1}) (c_{p-} \widehat{-} \delta_{p_2}) \binom{2c_{p+}+1}{2\delta_{p_1}}^{\frac{1}{2}} \binom{2c_{p-}+1}{2\delta_{p_2}}^{\frac{1}{2}} \\
 & \quad \begin{pmatrix} c_{p+} - \delta_{p_1} & c_{p-} - \delta_{p_2} & \alpha_{p_1} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_{p_1} & \delta_{p_2} & \alpha_{p_2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \left\{ \begin{matrix} c_{p+} - \delta_{p_1} & \delta_{p_1} & c_{p+} \\ c_{p-} - \delta_{p_2} & \delta_{p_2} & c_{p-} \\ \alpha_{p_1} & \alpha_{p_2} & c_p \end{matrix} \right\}.
 \end{aligned}$$

Entkopplung von Spin- und Orbitalanteil (D.1 , 2. und 4. Schritt)

Mit Hilfe der Formeln (A.14a) und (A.6) lassen sich Spin- und Orbitalanteil entkoppeln,

$$\begin{aligned}
 & \langle p'q'(\mathcal{L}'\mathcal{S}')J' || \left\{ \tilde{\mathcal{O}}^{(\kappa)} \otimes (\mathcal{O}^{(c)} \otimes S^{(d)})^{(e)} \right\}^{(j)} || pq(\mathcal{L}\mathcal{S})J \rangle \\
 &= \sum_{\sigma} RS(c, d, e, j; \mathcal{L}', \mathcal{S}', J', \mathcal{L}, \mathcal{S}, J; \kappa, \sigma) \\
 & \quad \langle p'q'\mathcal{L}' || (\tilde{\mathcal{O}}^{(\kappa)} \otimes \mathcal{O}^{(c)})^{(\sigma)} || pq\mathcal{L} \rangle \langle \mathcal{S}' || S^{(d)} || \mathcal{S} \rangle \quad (A.33)
 \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
 & RS(c, d, e, j; \mathcal{L}', \mathcal{S}', J', \mathcal{L}, \mathcal{S}, J; \kappa, \sigma) \\
 &= (-)^{c+d+j+\kappa} \hat{j}' \hat{j} \hat{j} \hat{e} \hat{\sigma} \begin{Bmatrix} c & d & e \\ j & \kappa & \sigma \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathcal{L}' & \mathcal{L} & \sigma \\ \mathcal{S}' & \mathcal{S} & d \\ J' & J & j \end{Bmatrix}.
 \end{aligned}$$



# Anhang B

## Umformungen mit $\gamma$ -Matrizen

Um den Zusammenhang zwischen Formfaktoren und Multipolmatrixelementen herzuleiten, müssen die in der Parametrisierung (2.10) auftretenden vierdimensionalen Matrizen  $\Gamma$  auf folgende Weise umgeschrieben werden,

$$\bar{u}_{s'}(\vec{p}') \Gamma u_s(\vec{p}) = (E' + M)^{\frac{1}{2}} (E + M)^{\frac{1}{2}} \alpha_{s'}^\dagger \tilde{\Gamma} \alpha_s. \quad (\text{B.1})$$

Da die verwendeten Dirac-Spinoren von der Form

$$u_s(\vec{p}) = (E + M)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{1}{\frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E + M}} \right) \alpha_s \quad \text{mit} \quad E = (M^2 + \vec{p}^2)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{B.2})$$

sind, sind die zwischen den Pauli-Spinoren  $\alpha_s$  auftretenden zweidimensionalen Matrizen  $\tilde{\Gamma}$  nach der Formel

$$\tilde{\Gamma} = \left( 1, -\frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}'}{E' + M} \right) \Gamma \left( \frac{1}{\frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E + M}} \right) \quad (\text{B.3})$$

zu berechnen. Die  $\gamma$ -Matrizen haben in der Standard-Darstellung von Bjorken und Drell [10] die Gestalt

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Desweiteren ist  $i\sigma^{\mu\nu} = \frac{-1}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu]$ . Für die in (2.10) auftretenden Matrizen ergeben sich in einem allgemeinen Bezugssystem die in der Tabelle B.1 dargestellten Matrizen  $\tilde{\Gamma}$ . Die für ein kollineares Bezugssystem ( $\vec{p} = \frac{1}{2}(\alpha - 1)\vec{k}$ ) spezialisierten Resultate sind in Tabelle B.2 aufgelistet. Um sie kompakter zu schreiben, haben wir den Faktor

$$B = \frac{\frac{1}{4}(\alpha^2 - 1)\vec{k}^2}{(E' + M)(E + M)} \bigg|_{\substack{\vec{p} = \frac{1}{2}(\alpha - 1)\vec{k} \\ \vec{p}' = \frac{1}{2}(\alpha + 1)\vec{k}}} \quad (\text{B.4})$$

eingeführt.  $\alpha$  ist der Bezugssystemparameter und  $k^\mu = p'^\mu - p^\mu$  der Viererimpulsübertrag.

$\Gamma$	$\tilde{\Gamma}$
$\gamma^0$	$\left(1 + \frac{\vec{p}' \cdot \vec{p}}{(E'+M)(E+M)}\right) [1] + \frac{1}{(E'+M)(E+M)} [i\vec{\sigma} \cdot (\vec{p}' \times \vec{p})]$
$-\frac{1}{2}[\gamma^0, \gamma^\mu] \frac{k_\mu}{2M}$	$\frac{1}{2M} \left( \frac{\vec{k} \cdot \vec{p}}{E+M} - \frac{\vec{k} \cdot \vec{p}'}{E'+M} \right) [1] + \frac{1}{2M} \left( \frac{1}{E+M} + \frac{1}{E'+M} \right) [i\vec{\sigma} \cdot (\vec{p}' \times \vec{p})]$
$\vec{\gamma}$	$\left( \frac{\vec{p}}{E+M} + \frac{\vec{p}'}{E'+M} \right) [1] + \frac{1}{E+M} [i\vec{p} \times \vec{\sigma}] - \frac{1}{E'+M} [i\vec{p}' \times \vec{\sigma}]$
$-\frac{1}{2}[\vec{\gamma}, \gamma^\mu] \frac{k_\mu}{2M}$	$\frac{k_0}{2M} \left\{ \left( \frac{\vec{p}}{E+M} - \frac{\vec{p}'}{E'+M} \right) [1] + \frac{1}{E+M} [i\vec{p} \times \vec{\sigma}] + \frac{1}{E'+M} [i\vec{p}' \times \vec{\sigma}] \right\}$ $+ \frac{\vec{k}}{2M} \times \left\{ \frac{\vec{p}' \times \vec{p}}{(E'+M)(E+M)} [1] - \left( 1 + \frac{\vec{p}' \cdot \vec{p}}{(E'+M)(E+M)} \right) [i\vec{\sigma}] \right.$ $\left. + \frac{1}{(E'+M)(E+M)} [(i\vec{\sigma} \cdot \vec{p})\vec{p}' + (i\vec{\sigma} \cdot \vec{p}')\vec{p}] \right\}$
$\gamma^0 \gamma_5$	$\frac{1}{E+M} [\vec{\sigma} \cdot \vec{p}] + \frac{1}{E'+M} [\vec{\sigma} \cdot \vec{p}']$
$\gamma_5$	$\frac{1}{E+M} [\vec{\sigma} \cdot \vec{p}] - \frac{1}{E'+M} [\vec{\sigma} \cdot \vec{p}']$
$\vec{\gamma} \gamma_5$	$\frac{-i\vec{p}' \times \vec{p}}{(E'+M)(E+M)} [1] + \left( 1 - \frac{\vec{p}' \cdot \vec{p}}{(E'+M)(E+M)} \right) [\vec{\sigma}]$ $+ \frac{1}{(E'+M)(E+M)} [(\vec{\sigma} \cdot \vec{p})\vec{p}' + (\vec{\sigma} \cdot \vec{p}')\vec{p}]$

**Tabelle B.1:** Die sich aus der Umschreibung (B.3) der  $\gamma$ -Matrizen ergebenden  $2 \times 2$ -Matrizen  $\tilde{\Gamma}$  in einem beliebigen Bezugssystem.

$\Gamma$	$\tilde{\Gamma}$
$\gamma^0$	$(1 + B) [1]$
$-\frac{1}{2}[\gamma^0, \gamma^\mu] \frac{k_\mu}{2M}$	$(1 + B) \frac{k_\mu^2}{4M^2} [1]$
$\vec{\gamma}$	$(1 + B) \left[ \frac{k_0}{k} \hat{k} + \frac{k_\mu^2}{2Mk} i\hat{k} \times \vec{\sigma} \right]$
$-\frac{1}{2}[\vec{\gamma}, \gamma^\mu] \frac{k_\mu}{2M}$	$(1 + B) \left[ \frac{k_0}{k} \frac{k_\mu^2}{4M^2} \hat{k} + \frac{k_\mu^2}{2Mk} i\hat{k} \times \vec{\sigma} \right]$
$\gamma^0 \gamma_5$	$(1 + B) \frac{k_0}{k} [\hat{k} \cdot \vec{\sigma}]$
$\gamma_5$	$(1 + B) \frac{2M}{k} \frac{k_\mu^2}{4M^2} [\hat{k} \cdot \vec{\sigma}]$
$\vec{\gamma} \gamma_5$	$(1 - B) [\vec{\sigma}] + 2B[(\hat{k} \cdot \vec{\sigma})\hat{k}]$

**Tabelle B.2:** Die sich aus der Umschreibung (B.3) der  $\gamma$ -Matrizen ergebenden  $2 \times 2$ -Matrizen  $\tilde{\Gamma}$  in einem kollinearen Bezugssystem.



# Anhang C

## Elektroschwache Stromoperatoren

In diesem Anhang geben wir die in unseren Rechnungen verwendeten elektroschwachen Stromoperatoren an. Der elektroschwache Strom setzt sich aus Ein- und Zweikörper-Anteilen zusammen,

$$J^\mu(\vec{k}) = \sum_{i=1}^3 J^\mu(1, \vec{k})_i + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^3 J^\mu(2, \vec{k})_{ij}.$$

Aufgrund der Antisymmetrie der Dreiteilchen-Wellenfunktionen reicht es aus, lediglich den Einkörper-Beitrag von Teilchen 1 und den Zweikörper-Beitrag des Paares 23 explizit zu berechnen. Den Gesamtbeitrag erhält man dann einfach durch Multiplikation dieser Einzelbeiträge mit einem Faktor 3. Die Matrixelemente dieser Operatoren haben im Impulsraum des Dreiteilchen-Systems folgende allgemeine Struktur,

$$\begin{aligned} \langle \vec{p}_1' \vec{p}_2' \vec{p}_3' | J^\mu(1, \vec{k})_1 | \vec{p}_1 \vec{p}_2 \vec{p}_3 \rangle &= j^\mu(1, \vec{k}, \vec{Q}_1)_1 \delta^{(3)}(\vec{q}_1 - \vec{k}) \delta^{(3)}(\vec{q}_2) \delta^{(3)}(\vec{q}_3), \\ \langle \vec{p}_1' \vec{p}_2' \vec{p}_3' | J^\mu(2, \vec{k})_{23} | \vec{p}_1 \vec{p}_2 \vec{p}_3 \rangle &= j^\mu(2, \vec{k}, \vec{q}_2, \vec{q}_3, \vec{Q}_2, \vec{Q}_3)_{23} \delta^{(3)}(\vec{q}_1) \delta^{(3)}(\vec{q}_2 + \vec{q}_3 - \vec{k}), \end{aligned}$$

wobei mit  $\vec{q}_i = \vec{p}_i' - \vec{p}_i$  und  $\vec{Q}_i = \vec{p}_i' + \vec{p}_i$  Differenz und Summe der Teilchenimpulse  $\vec{p}_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) eingeführt wurden. Im 1. Abschnitt dieses Anhangs geben wir die elektromagnetischen (e.m.) Stromoperatoren, im 2. Abschnitt die schwachen Stromoperatoren an. Da der Vektoranteil des schwachen Stroms aufgrund der CVC (= *Conserved Vector Current*) Relation durch Isospinrotation aus dem Isektoranteil des e.m. Stroms hervorgeht, beschränken wir uns im 2. Abschnitt auf die Auflistung der axialen Stromoperatoren. Beide Abschnitte sind wiederum gegliedert in Unterabschnitte über Einnukleonen-Ströme, Zweinukleonen-Ströme und  $\Delta$ -Isobar-Ströme. Im 3. Abschnitt listen wir die in den Operatoren auftretenden externen Formfaktoren, Propagatorfunktionen, Spin- und Isospinoperatoren auf und ordnen diesen Operatoranteilen Zahlen zu, die in der Praxis als Input zur numerischen Formfaktorberechnung dienen.

## C.1 Elektromagnetische Stromoperatoren

Die verwendeten e.m. Stromoperatoren sind den Referenzen [45, 4, 7] entnommen. In Kapitel 3.2 sind diese Operatoren diagrammatisch dargestellt worden und es wurden besondere Aspekte, wie die Wahl von Formfaktoren diskutiert. An dieser Stelle beschränken wir uns daher im wesentlichen darauf, die analytische Form der Operatoren anzugeben.

### C.1.1 Einnukleonen-Ströme

Der relativistische e.m. Einnukleonen-Strom ist gegeben durch

$$j_{em}^\mu(1, \vec{k}, \vec{Q}_1)_1 = \frac{1}{(4E_1 E'_1)^{\frac{1}{2}}} \bar{u}(\vec{p}_1') \left( \hat{e}_1 \gamma^\mu + \hat{\kappa}_1 i \sigma^{\mu\nu} \frac{k_\nu}{2m} \right) u(\vec{p}_1) \Big|_{\substack{\vec{p}_1' = \frac{1}{2}(\vec{Q}_1 + \vec{k}) \\ \vec{p}_1 = \frac{1}{2}(\vec{Q}_1 - \vec{k})}} \quad (\text{C.1})$$

wobei für die Dirac- und Pauli Formfaktoren folgende Kurzschreibweise eingeführt wurde

$$\begin{aligned} \hat{e}_i &= \frac{1}{2} \left\{ f_1^{IS}(k_\mu^2) + f_1^{IV}(k_\mu^2) (\vec{\tau}_i)_3 \right\}, \\ \hat{\kappa}_i &= \frac{1}{2} \left\{ f_2^{IS}(k_\mu^2) + f_2^{IV}(k_\mu^2) (\vec{\tau}_i)_3 \right\}. \end{aligned}$$

In dem Ausdruck  $(\vec{\tau}_i)_j$  ist  $i$  der Teilchenindex und  $j$  die Komponente. Die nicht-relativistische Reduktion von (C.1) liefert,

$$\rho_{em}^{(0)}(1, \vec{k}, \vec{Q}_1)_1 = \hat{e}_1, \quad (\text{C.2})$$

$$\vec{j}_{em}^{(1)}(1, \vec{k}, \vec{Q}_1)_1 = \frac{1}{2m} \left\{ \hat{e}_1 [\vec{Q}_1] + (\hat{e}_1 + \hat{\kappa}_1) [i \vec{\sigma}_1 \times \vec{k}] \right\}. \quad (\text{C.3})$$

Der Operator der Ladung ist von der Ordnung  $(p/m)^0$ , der Operator des räumlichen Stroms von der Ordnung  $(p/m)^1$ . Dies ist durch die Zahlen in den runden Klammern angedeutet. Die führenden relativistischen Korrekturen zur Ladung treten in der Ordnung  $(p/m)^2$  und haben die Form

$$\rho_{em}^{(2)}(1, \vec{k}, \vec{Q}_1)_1 = - \frac{(\hat{e}_1 + 2\hat{\kappa}_1)}{8m^2} \left\{ \vec{k}^2 + (i \vec{\sigma}_1 \times \vec{Q}_1) \cdot \vec{k} \right\}. \quad (\text{C.4})$$

Die relativistischen Korrekturen zum Strom treten erst in in der Ordnung  $(p/m)^3$  auf und sind daher in dieser Arbeit nicht berücksichtigt worden. Die Beiträge zum räumlichen Strom (C.3) heißen Konvektions- und Spin-Strom. Die Korrekturen zur Ladung (C.4) bezeichnet man als Darwin-Foldy- und Spin-Orbit-Term.

### C.1.2 Zweinukleonen-Ströme

Um die Zweinukleonen-Ströme (MEC) in kompakter Form darstellen zu können, führen wir zuerst die sogenannte Propagatorfunktion ein, die angibt, ob der MEC vom Kontakt- (*con*), Retardierungs- (*ret*), Meson im Flug- (*mes*) oder Dissoziations- (*dis*) Typ ist:

$$F_B^{con}(\vec{q}_i^2) = \frac{f_{BNN}^2(\vec{q}_i^2)}{m_B^2 + \vec{q}_i^2}, \quad (C.5)$$

$$F_B^{ret}(\vec{q}_i^2) = -\frac{d}{d\vec{q}_i^2} F_B^{con}(\vec{q}_i^2), \quad (C.6)$$

$$F_B^{mes}(\vec{q}_i^2, \vec{q}_j^2) = -\frac{1}{\vec{q}_i^2 - \vec{q}_j^2} \left( F_B^{con}(\vec{q}_i^2) - F_B^{con}(\vec{q}_j^2) \right), \quad (C.7)$$

$$F_{B_1, B_2}^{dis}(\vec{q}_i^2, \vec{q}_j^2) = \frac{f_{B_1NN}(\vec{q}_i^2)}{m_{B_1}^2 + \vec{q}_i^2} \frac{f_{B_2NN}(\vec{q}_j^2)}{m_{B_2}^2 + \vec{q}_j^2}. \quad (C.8)$$

$f_{BNN}(\vec{q}^2)$  sind hierbei die starken phänomenologischen Formfaktoren, die die Boson-Nukleon Kopplungen beschreiben ( $B = \pi, \rho, \omega, \dots$ ) und konsistent mit dem verwendeten Potential zu wählen sind.

In Übereinstimmung mit Siegerts Hypothese treten Zweikörper-Operatoren der e.m. Ladung erst in relativistischer Ordnung auf. Da deren Einfluß auf die Myon-Einfang Reaktion äußerst gering ist [23], sind sie in dieser Arbeit nicht berücksichtigt worden. Die räumlichen e.m. Zweikörper-Ströme hingegen treten bereits in derselben nicht-relativistischer Ordnung auf wie die entsprechenden Einkörper-Ströme. Sie lassen sich unterteilen in potentialartige Ströme und nicht-potentialartige Ströme.

### Potentialartige Ströme

Unter potentialartigen Strömen verstehen wir die Operatoren, die aus den, das Potential definierenden, Feynman-Diagrammen mit einer äußeren angehefteten Photon-Linie hervorgehen. Diese Ströme werden auch zeitweise als modellunabhängige Ströme bezeichnet, was ein wenig irreführend ist, da diese Ströme gerade vom verwendeten Potential (-modell) abhängen.

In dieser Arbeit berücksichtigen wir die räumlichen e.m. Zweikörper-Ströme, die vom  $\pi$ - und  $\rho$ -Meson-Autausch herrühren. Es sind dies jeweils der Kontakt-Strom und der Meson (im Flug)-Strom Während die pionischen MEC von der Ordnung  $(p/m)^1$ , sind die verwendeten  $\rho$ -MEC von der Ordnung  $(p/m)^3$  und müßten nach unseren Kriterien eigentlich weggelassen werden. Die aufgeführten Operatoren sind jedoch berücksichtigt worden, da die in ihnen auftretende Koppelungskonstante  $(1 + \kappa_\rho)^2 \approx 50$  sehr groß ist. Diese Operatoren werden auch als Pauli-Ströme bezeichnet.

#### $\pi$ -Kontakt-Strom

$$\begin{aligned} & \vec{j}_{em}^{(1)}(2, \pi\text{-Kontakt}, \vec{k}, \vec{q}_2, \vec{q}_3)_{23} \\ &= -\frac{1}{8\pi^2 m^2} \frac{g_{\pi NN}^2}{4\pi} \left\{ f_1^{IV}(k_\mu^2)(i\vec{\tau}_2 \times \vec{\tau}_3)_3 F_\pi^{con}(\vec{q}_3^2)(\vec{q}_3 \cdot \vec{\sigma}_3)[\vec{\sigma}_2] + 2 \leftrightarrow 3 \right\}. \end{aligned} \quad (C.9)$$

#### $\pi$ -Meson-Strom

$$\begin{aligned} & \vec{j}_{em}^{(1)}(2, \pi\text{-Meson}, \vec{k}, \vec{q}_2, \vec{q}_3)_{23} \\ &= \frac{1}{8\pi^2 m^2} \frac{g_{\pi NN}^2}{4\pi} f_1^{IV}(k_\mu^2)(i\vec{\tau}_2 \times \vec{\tau}_3)_3 F_\pi^{mes}(\vec{q}_2^2, \vec{q}_3^2)(\vec{q}_2 \cdot \vec{\sigma}_2)(\vec{q}_3 \cdot \vec{\sigma}_3)[\vec{q}_2 - \vec{q}_3]. \end{aligned} \quad (C.10)$$

#### $\rho$ -Kontakt-Strom

$$\begin{aligned} & \vec{j}_{em}^{(3)}(2, \rho\text{-Kontakt}, \vec{k}, \vec{q}_2, \vec{q}_3)_{23} \\ &= -\frac{1}{8\pi^2 m^2} \frac{g_{\rho NN}^2}{4\pi} (1 + \kappa_\rho)^2 \\ & \quad \left\{ f_1^{IV}(k_\mu^2)(i\vec{\tau}_2 \times \vec{\tau}_3)_3 F_\rho^{con}(\vec{q}_3^2)[(\vec{\sigma}_3 \times \vec{q}_3) \times \vec{\sigma}_2] + 2 \leftrightarrow 3 \right\}. \end{aligned} \quad (C.11)$$

#### $\rho$ -Meson-Strom

$$\begin{aligned} & \vec{j}_{em}^{(3)}(2, \rho\text{-Meson}, \vec{k}, \vec{q}_2, \vec{q}_3)_{23} \\ &= \frac{1}{8\pi^2 m^2} \frac{g_{\rho NN}^2}{4\pi} (1 + \kappa_\rho)^2 \\ & \quad f_1^{IV}(k_\mu^2)(i\vec{\tau}_2 \times \vec{\tau}_3)_3 F_\rho^{mes}(\vec{q}_2^2, \vec{q}_3^2)((\vec{q}_2 \times \vec{\sigma}_2) \cdot (\vec{q}_3 \times \vec{\sigma}_3))[\vec{q}_2 - \vec{q}_3]. \end{aligned} \quad (C.12)$$

#### $\rho$ -Meson-Strom (transversal)

$$\begin{aligned} & \vec{j}_{em}^{(3)}(2, \rho\text{-Meson-tr}, \vec{k}, \vec{q}_2, \vec{q}_3)_{23} \\ &= -\frac{1}{8\pi^2 m^2} \frac{g_{\rho NN}^2}{4\pi} (1 + \kappa_\rho)^2 \\ & \quad f_1^{IV}(k_\mu^2)(i\vec{\tau}_2 \times \vec{\tau}_3)_3 F_\rho^{mes}(\vec{q}_2^2, \vec{q}_3^2)[\vec{k}] \times [(\vec{q}_2 \times \vec{\sigma}_2) \times (\vec{q}_3 \times \vec{\sigma}_3)]. \end{aligned} \quad (C.13)$$

### Nicht-potentialartige Ströme

Die von uns berücksichtigten nicht-potentialartigen Ströme sind der isoskalare  $\rho\pi\gamma$ -Strom und der isovektorielle  $\omega\pi\gamma$ -Strom.

#### $\rho\pi\gamma$ -Strom

$$\begin{aligned} & \vec{j}_{em}^{(1)}(2, \rho\pi\gamma, \vec{k}, \vec{q}_2, \vec{q}_3)_{23} \\ &= -\frac{1}{4\pi^2 m^2} \frac{g_{\pi NN} g_{\rho NN}}{4\pi} \\ & \quad \left\{ \frac{m}{m_\rho} g_{\rho\pi\gamma} f_{\rho\pi\gamma}(k_\mu^2) (\vec{\tau}_2 \cdot \vec{\tau}_3) F_{\rho\pi}^{dis}(\vec{q}_2^2, \vec{q}_3^2) (\vec{q}_3 \cdot \vec{\sigma}_3) [i\vec{q}_2 \times \vec{q}_3] + 2 \leftrightarrow 3 \right\}. \end{aligned} \quad (C.14)$$

#### $\omega\pi\gamma$ -Strom

$$\begin{aligned} & \vec{j}_{em}^{(1)}(2, \omega\pi\gamma, \vec{k}, \vec{q}_2, \vec{q}_3)_{23} \\ &= -\frac{1}{4\pi^2 m^2} \frac{g_{\pi NN} g_{\omega NN}}{4\pi} \\ & \quad \left\{ \frac{m}{m_\omega} g_{\omega\pi\gamma} f_{\omega\pi\gamma}(k_\mu^2) (\vec{\tau}_3)_3 F_{\omega\pi}^{dis}(\vec{q}_2^2, \vec{q}_3^2) (\vec{q}_3 \cdot \vec{\sigma}_3) [i\vec{q}_2 \times \vec{q}_3] + 2 \leftrightarrow 3 \right\}. \end{aligned} \quad (C.15)$$

### C.1.3 $\Delta$ -Isobar-Ströme

Da die  $\Delta$ -Isobar-Wahrscheinlichkeit in der Dreiteilchen-Wellenfunktion mit  $\approx 2\%$  recht klein ist, berücksichtigen wir nur nicht-relativistische  $\Delta$ -Isobar-Ströme.

#### Einkörper-Ströme mit $\Delta$ -Isobar-Anregung

##### $N\Delta$ -Übergangs-Strom

Beim  $N\Delta$ -Strom beschränken wir uns auf den dominanten magnetischen Dipol Übergang (M1),

$$\vec{j}_{em}^{N \rightarrow \Delta(1)}(1, \vec{k}, \vec{Q}_1)_1 = \frac{1}{2m_\Delta} g_{M1}^{N\Delta}(k_\mu^2) [i\vec{\sigma}_1^{N \rightarrow \Delta} \times \vec{k}] (\vec{\tau}_1^{N \rightarrow \Delta})_3. \quad (C.16)$$

##### $\Delta$ -Diagonal-Strom

Im  $\Delta$ -Diagonal-Strom berücksichtigen wir darüberhinaus den elektrischen E0-Übergang,

$$\rho_{em}^{\Delta(0)}(1, \vec{k}, \vec{Q}_1)_1 = g_{E0}^\Delta(k_\mu^2) \frac{1}{2} \left( 1 + (\vec{\tau}_1^\Delta)_3 \right), \quad (C.17)$$

$$\begin{aligned} \vec{j}_{em}^{\Delta(1)}(1, \vec{k}, \vec{Q}_1)_1 &= \frac{1}{2m_\Delta} \left( g_{E0}^\Delta(k_\mu^2) [\vec{Q}_1] + g_{M1}^\Delta(k_\mu^2) [i\vec{\sigma}_1^\Delta \times \vec{k}] \right) \frac{1}{2} \left( 1 + (\vec{\tau}_1^\Delta)_3 \right). \end{aligned} \quad (C.18)$$

### Zweikörperströme mit $\Delta$ -Isobar-Anregung

Da die verwendeten erweiterten Kraftmodelle  $A2$  und  $C2$  neben den rein-nukleonischen Übergängen nur  $NN \rightarrow N\Delta$  Übergänge enthalten, sind die potentialartigen Zweikörper-Ströme mit  $\Delta$ -Isobar-Anregung ( $\Delta$ -MEC) vom entsprechenden Typ. Übergänge der Gestalt  $NN \rightarrow \Delta\Delta$  und  $N\Delta \rightarrow N\Delta$  treten nicht auf. Auch bei den nicht-potentialartigen MEC beschränken wir uns auf Operatoren vom  $NN \rightarrow N\Delta$ -Übergangstyp, da  $N\Delta \rightarrow N\Delta$ -Übergänge Übergänge zwischen kleinen Wellenfunktionskomponenten darstellen (siehe Kapitel 3.1, Tabelle 3.2) und damit sehr geringes Gewicht haben.

Die im folgenden aufgelisteten  $\Delta$ -MEC gehen formal aus den rein-nukleonischen MEC des vorangegangenen Abschnitts C.1.2 hervor, in dem man in diesen Operatoren jeweils einen  $BNN$ -Vertex durch einen  $BN\Delta$ -Vertex ersetzt. Die hierdurch entstehenden  $\Delta$ -MEC enthalten drei neue Typen von Propagatorfunktionen,

$$F_B^{con, N\Delta}(\vec{q}_i^2) = \frac{f_{BNN}(\vec{q}_i^2)f_{BN\Delta}(\vec{q}_i^2)}{m_B^2 + \vec{q}_i^2}, \quad (C.19)$$

$$F_B^{mes, N\Delta}(\vec{q}_i^2, \vec{q}_j^2) = -\frac{1}{\vec{q}_i^2 - \vec{q}_j^2} \left( F_B^{con, N\Delta}(\vec{q}_i^2) - F_B^{con, N\Delta}(\vec{q}_j^2) \right), \quad (C.20)$$

$$F_{B_1, B_2}^{dis, N\Delta}(\vec{q}_i^2, \vec{q}_j^2) = \frac{f_{B_1NN}(\vec{q}_i^2)}{m_{B_1}^2 + \vec{q}_i^2} \frac{f_{B_2N\Delta}(\vec{q}_j^2)}{m_{B_2}^2 + \vec{q}_j^2}, \quad (C.21)$$

in denen zusätzlich zu den bisherigen starken Formfaktoren die Boson-Nukleon- $\Delta$  Formfaktoren  $f_{BN\Delta}(\vec{q}^2)$  ( $B = \pi, \rho, \dots$ ) auftreten. Man beachte, daß die Dissoziations-Propagatorfunktion nicht mehr symmetrisch unter Vertauschung von  $B_1$  und  $B_2$  ist.

#### $\pi$ -Kontakt- $N\Delta$ -Strom ( $NN\gamma$ )

$$\begin{aligned} & \vec{j}_{em}^{N \rightarrow \Delta(1)}(2, \pi\text{-Kontakt}(NN\gamma), \vec{k}, \vec{q}_2, \vec{q}_3)_{23} \\ &= -\frac{1}{8\pi^2 m^2} \frac{g_{\pi NN} g_{\pi N\Delta}}{4\pi} \\ & \quad \left\{ f_1^{IV}(k_\mu^2)(i\vec{\tau}_2 \times \vec{\tau}_3^{N \rightarrow \Delta}) F_\pi^{con, N\Delta}(\vec{q}_3^2)(\vec{q}_3 \cdot \vec{\sigma}_3^{N \rightarrow \Delta})[\vec{\sigma}_2] + 2 \leftrightarrow 3 \right\}. \end{aligned} \quad (C.22)$$

#### $\pi$ -Kontakt- $N\Delta$ -Strom ( $N\Delta\gamma$ )

$$\begin{aligned} & \vec{j}_{em}^{N \rightarrow \Delta(1)}(2, \pi\text{-Kontakt}(N\Delta\gamma), \vec{k}, \vec{q}_2, \vec{q}_3)_{23} \\ &= -\frac{1}{8\pi^2 m^2} \frac{g_{\pi NN} g_{\pi N\Delta}}{4\pi} \\ & \quad \left\{ f_1^{IV}(k_\mu^2)(i\vec{\tau}_2^{N \rightarrow \Delta} \times \vec{\tau}_3) F_\pi^{con, N\Delta}(\vec{q}_3^2)(\vec{q}_3 \cdot \vec{\sigma}_3)[\vec{\sigma}_2^{N \rightarrow \Delta}] + 2 \leftrightarrow 3 \right\}. \end{aligned} \quad (C.23)$$

$\pi$ -Meson- $N\Delta$ -Strom

$$\begin{aligned}
& \vec{j}_{em}^{N \rightarrow \Delta (1)}(2, \pi\text{-Meson}, \vec{k}, \vec{q}_2, \vec{q}_3)_{23} \\
&= \frac{1}{8\pi^2 m^2} \frac{g_{\pi NN} g_{\pi N\Delta}}{4\pi} \\
& \quad \left\{ f_1^{IV}(k_\mu^2) (i\vec{\tau}_2 \times \vec{\tau}_3^{N \rightarrow \Delta})_3 F_\pi^{mes, N\Delta}(\vec{q}_2^2, \vec{q}_3^2) (\vec{q}_2 \cdot \vec{\sigma}_2) (\vec{q}_3 \cdot \vec{\sigma}_3^{N \rightarrow \Delta}) [\vec{q}_2 - \vec{q}_3] \right. \\
& \quad \left. + 2 \leftrightarrow 3 \right\}. \tag{C.24}
\end{aligned}$$

 $\rho$ -Kontakt- $N\Delta$ -Strom ( $NN\gamma$ )

$$\begin{aligned}
& \vec{j}_{em}^{N \rightarrow \Delta (3)}(2, \rho\text{-Kontakt } (NN\gamma), \vec{k}, \vec{q}_2, \vec{q}_3)_{23} \\
&= - \frac{1}{8\pi^2 m^2} \frac{g_{\rho NN} g_{\rho N\Delta}}{4\pi} (1 + \kappa_\rho) (1 + \kappa_{\rho N\Delta}) \\
& \quad \left\{ f_1^{IV}(k_\mu^2) (i\vec{\tau}_2 \times \vec{\tau}_3^{N \rightarrow \Delta})_3 F_\rho^{con, N\Delta}(\vec{q}_3^2) [(\vec{\sigma}_3^{N \rightarrow \Delta} \times \vec{q}_3) \times \vec{\sigma}_2] + 2 \leftrightarrow 3 \right\}. \tag{C.25}
\end{aligned}$$

 $\rho$ -Kontakt- $N\Delta$ -Strom ( $N\Delta\gamma$ )

$$\begin{aligned}
& \vec{j}_{em}^{N \rightarrow \Delta (3)}(2, \rho\text{-Kontakt } (N\Delta\gamma), \vec{k}, \vec{q}_2, \vec{q}_3)_{23} \\
&= - \frac{1}{8\pi^2 m^2} \frac{g_{\rho NN} g_{\rho N\Delta}}{4\pi} (1 + \kappa_\rho) (1 + \kappa_{\rho N\Delta}) \\
& \quad \left\{ f_1^{IV}(k_\mu^2) (i\vec{\tau}_2^{N \rightarrow \Delta} \times \vec{\tau}_3)_3 F_\rho^{con, N\Delta}(\vec{q}_3^2) [(\vec{\sigma}_3 \times \vec{q}_3) \times \vec{\sigma}_2^{N \rightarrow \Delta}] + 2 \leftrightarrow 3 \right\}. \tag{C.26}
\end{aligned}$$

 $\rho$ -Meson- $N\Delta$ -Strom

$$\begin{aligned}
& \vec{j}_{em}^{N \rightarrow \Delta (3)}(2, \rho\text{-Meson}, \vec{k}, \vec{q}_2, \vec{q}_3)_{23} \\
&= \frac{1}{8\pi^2 m^2} \frac{g_{\rho NN} g_{\rho N\Delta}}{4\pi} (1 + \kappa_\rho) (1 + \kappa_{\rho N\Delta}) \\
& \quad \left\{ f_1^{IV}(k_\mu^2) (i\vec{\tau}_2 \times \vec{\tau}_3^{N \rightarrow \Delta})_3 F_\rho^{mes, N\Delta}(\vec{q}_2^2, \vec{q}_3^2) \left( (\vec{q}_2 \times \vec{\sigma}_2) \cdot (\vec{q}_3 \times \vec{\sigma}_3^{N \rightarrow \Delta}) \right) [\vec{q}_2 - \vec{q}_3] \right. \\
& \quad \left. + 2 \leftrightarrow 3 \right\}. \tag{C.27}
\end{aligned}$$

 $\rho$ -Meson- $N\Delta$ -Strom (transversal)

$$\begin{aligned}
& \vec{j}_{em}^{N \rightarrow \Delta (3)}(2, \rho\text{-Meson-tr}, \vec{k}, \vec{q}_2, \vec{q}_3)_{23} \\
&= - \frac{1}{8\pi^2 m^2} \frac{g_{\rho NN} g_{\rho N\Delta}}{4\pi} (1 + \kappa_\rho) (1 + \kappa_{\rho N\Delta}) \\
& \quad \left\{ f_1^{IV}(k_\mu^2) (i\vec{\tau}_2 \times \vec{\tau}_3^{N \rightarrow \Delta})_3 F_\rho^{mes, N\Delta}(\vec{q}_2^2, \vec{q}_3^2) [\vec{k}] \times [(\vec{q}_2 \times \vec{\sigma}_2) \times (\vec{q}_3 \times \vec{\sigma}_3^{N \rightarrow \Delta})] \right. \\
& \quad \left. + 2 \leftrightarrow 3 \right\}. \tag{C.28}
\end{aligned}$$

$\rho\pi\gamma$ - $N\Delta$ -Strom

$$\begin{aligned}
& \vec{j}_{em}^{N \rightarrow \Delta(1)}(2, \rho\pi\gamma, \vec{k}, \vec{q}_2, \vec{q}_3)_{23} \\
&= -\frac{1}{4\pi^2 m^2} \frac{g_{\rho NN} g_{\pi N \Delta}}{4\pi} \\
& \quad \left\{ \frac{m}{m_\rho} g_{\rho\pi\gamma} f_{\rho\pi\gamma}(k_\mu^2) (\vec{\tau}_2 \cdot \vec{\tau}_3^{N \rightarrow \Delta}) F_{\rho\pi}^{dis, N\Delta}(\vec{q}_2^2, \vec{q}_3^2) (\vec{q}_3 \cdot \vec{\sigma}_3^{N \rightarrow \Delta}) [i\vec{q}_2 \times \vec{q}_3] + 2 \leftrightarrow 3 \right\}.
\end{aligned} \tag{C.29}$$

 $\omega\pi\gamma$ - $N\Delta$ -Strom ( $\pi N\Delta$ )

$$\begin{aligned}
& \vec{j}_{em}^{N \rightarrow \Delta(1)}(2, \omega\pi\gamma, \vec{k}, \vec{q}_2, \vec{q}_3)_{23} \\
&= -\frac{1}{4\pi^2 m^2} \frac{g_{\omega NN} g_{\pi N \Delta}}{4\pi} \\
& \quad \left\{ \frac{m}{m_\omega} g_{\omega\pi\gamma} f_{\omega\pi\gamma}(k_\mu^2) (\vec{\tau}_3^{N \rightarrow \Delta})_3 F_{\omega\pi}^{dis, N\Delta}(\vec{q}_2^2, \vec{q}_3^2) (\vec{q}_3 \cdot \vec{\sigma}_3^{N \rightarrow \Delta}) [i\vec{q}_2 \times \vec{q}_3] + 2 \leftrightarrow 3 \right\}.
\end{aligned} \tag{C.30}$$



## C.2 Axiale Stromoperatoren

Die verwendeten axialen Stromoperatoren sind der Referenz [5] entnommen. Wie die e.m. Operatoren sind auch diese Operatoren in Kapitel 3.2 diagrammatisch dargestellt und im Detail diskutiert worden. Daher beschränken wir uns auch an dieser Stelle im wesentlichen darauf, die analytische Form der Operatoren anzugeben.

### C.2.1 Einnukleonen-Ströme

Der relativistische Einnukleonen-Strom hat die Gestalt

$$j_A^\mu(1, \vec{k}, \vec{Q}_1)_1 = \frac{1}{(4E_1 E'_1)^{\frac{1}{2}}} \bar{u}(\vec{p}_1') \left( f_A \gamma^\mu \gamma_5 + f_P \gamma_5 \frac{k^\mu}{2m} \right) \frac{1}{2} (\vec{\tau}_1)_a u(\vec{p}_1) \Big|_{\substack{\vec{p}_1' = \frac{1}{2}(\vec{Q}_1 + \vec{k}) \\ \vec{p}_1 = \frac{1}{2}(\vec{Q}_1 - \vec{k})}} \quad (\text{C.31})$$

wobei der Isospinoperator  $(\vec{\tau}_1)_3$  oder  $(\vec{\tau}_1)_\pm = (\vec{\tau}_1)_1 \pm i(\vec{\tau}_1)_2$  sein kann, je nachdem, ob wir eine ladungserhaltende oder ladungsändernde Reaktion betrachten.  $f_A = f_A(k_\mu^2)$  ist der axiale Formfaktor und  $f_P = f_P(k_\mu^2)$  der induzierte pseudoskalare Formfaktor des Nukleons. Die nicht-relativistische Reduktion von (C.31) ergibt,

$$\rho_A^{(1)}(1, \vec{k}, \vec{Q}_1)_1 = \left( \frac{f_A}{2m} (\vec{Q}_1 \cdot \vec{\sigma}_1) - \frac{f_P k_0}{4m^2} (\vec{k} \cdot \vec{\sigma}_1) \right) \frac{1}{2} (\vec{\tau}_1)_a, \quad (\text{C.32})$$

$$\vec{j}_A^{(0)}(1, \vec{k}, \vec{Q}_1)_1 = \left( f_A [\vec{\sigma}_1] - \frac{f_P}{4m^2} [(\vec{k} \cdot \vec{\sigma}_1) \vec{k}] \right) \frac{1}{2} (\vec{\tau}_1)_a. \quad (\text{C.33})$$

Die Terme proportional zu  $f_P(k_\mu^2)$  sind strenggenommen von relativistischer Ordnung. Der Grund, warum an dieser Stelle auch diese Terme mitberücksichtigt werden, ist, daß der pseudoskalare Formfaktor aufgrund der PCAC-Relation

$$f_P(k_\mu^2) = \frac{4m^2}{m_\pi^2 - k_\mu^2} f_A(k_\mu^2)$$

sehr große Werte annimmt. Wir beobachten, daß beim axialen Strom die Ladung von der Ordnung  $(p/m)^1$  und der räumliche Strom von der Ordnung  $(p/m)^0$  ist. Beim e.m. Strom war dies genau umgekehrt. Entsprechend treten relativistische Korrekturen zum räumlichen Strom bereits in der Ordnung  $(p/m)^2$  auf, während die Korrekturen zur Ladung von der Ordnung  $(p/m)^3$  sind und daher in dieser Arbeit nicht berücksichtigt wurden.

Die Korrekturen zum räumlichen axialen Strom haben die Form,

$$\begin{aligned}
\vec{j}_A^{(2)}(1, \vec{k}, \vec{Q}_1)_1 &= \left( \frac{f_A}{8m^2} \left\{ -\vec{Q}_1^2 [\vec{\sigma}_1] + [i\vec{Q}_1 \times \vec{k}] + [(\vec{Q}_1 \cdot \vec{\sigma}_1)\vec{Q}_1] - [(\vec{k} \cdot \vec{\sigma}_1)\vec{k}] \right\} \right. \\
&+ \frac{f_P}{32m^4} \left\{ (4mk_0 - \vec{Q}_1 \cdot \vec{k})(\vec{Q}_1 \cdot \vec{\sigma}_1) + (\vec{Q}_1^2 + \vec{k}^2)(\vec{k} \cdot \vec{\sigma}_1) \right\} [\vec{k}] \Bigg) \\
&\quad \frac{1}{2}(\vec{\tau}_1)_a.
\end{aligned} \tag{C.34}$$

Die in den relativistischen Korrekturen auftretende Größe  $k_0$  definieren wir als den Energieübertrag auf den ganzen Kern und nicht als Energieübertrag auf das einzelne Nukleon. Aufgrund dieser Wahl, die in [4] als “lepton kinematics” bezeichnet und dort im Detail diskutiert ist, enthält der Einkörper-Strom implizite Zweikörper-Anteile. Die konsistent zu definierenden Zweinukleonen-Ströme vereinfachen sich, da die komplizierten “externen” MEC durch diese Wahl verschwinden.

### C.2.2 Zweinukleonen-Ströme

Die in Referenz [5] konstruierten Zweinukleonen-Korrekturen zur Ladung treten bereits in nicht-relativistischer Ordnung  $(p/m)^1$  auf, während die Zweinukleonen-Korrekturen zum axialen räumlichen Strom erst in der relativistischen Ordnung  $(p/m)^2$  auftreten. Wie sich in Kapitel 4 aber gezeigt hat, werden die axialen Formfaktoren  $F_A(k_\mu^2)$  und  $F_P(k_\mu^2)$  des gebundenen Dreinukleonen-Systems vollständig durch den räumlichen Anteil des axialen Stroms bestimmt. Daher listen wir an dieser Stelle auch nur die in unseren praktischen Rechnungen verwendeten räumlichen Zweinukleonen-Ströme auf. Sie lassen sich unterteilen in Born-artige Ströme und nicht-Born-artige Ströme. Die in den folgenden Operatoren auftretenden Propagatorfunktionen  $F_B^{con}(\vec{q}_i^2)$ ,  $F_B^{ret}(\vec{q}_i^2)$  und  $F_{B_1, B_2}^{dis}(\vec{q}_i^2, \vec{q}_j^2)$  sind in Abschnitt C.1.2 angegeben.

### Nicht-Born-artige Ströme

Die nicht-Born-artigen Ströme sind diagrammatisch dargestellt in der zweiten Reihe von Abbildung 3.6. Sie besitzen die folgende analytische Gestalt:

$\rho\pi$ -Strom (direkt)

$$\begin{aligned} & \vec{j}_A^{(2)}(2, \rho\pi \text{ (direkt)}, \vec{k}, \vec{q}_2, \vec{q}_3, \vec{Q}_2, \vec{Q}_3)_{23} \\ &= \frac{1}{32\pi^2 m} \frac{g_{\pi NN}^2}{4\pi} \left( \frac{m_\rho^2}{g_A m^2} F_{\pi\rho}(k_\mu^2) \right) \\ & \quad \left\{ (i\vec{\tau}_2 \times \vec{\tau}_3)_a F_{\rho\pi}^{dis}(\vec{q}_2^2, \vec{q}_3^2) [\vec{q}_3 \cdot \vec{\sigma}_3] [\vec{Q}_2 + (1 + \kappa_\rho) i\vec{\sigma}_2 \times \vec{q}_2] + 2 \leftrightarrow 3 \right\}. \end{aligned} \quad (C.35)$$

$\rho\pi$ -Strom ( $\pi$ -Pol)

$$\begin{aligned} & \vec{j}_A^{(2)}(2, \rho\pi \text{ ( $\pi$ -Pol)}, \vec{k}, \vec{q}_2, \vec{q}_3, \vec{Q}_2, \vec{Q}_3)_{23} \\ &= - \frac{1}{16\pi^2 m} \frac{g_{\pi NN}^2}{4\pi} \left( \frac{m_\rho^2}{g_A m^2} F_{\pi\rho}(k_\mu^2) \right) \frac{\vec{k}}{m_\pi^2 - k_\mu^2} \\ & \quad \left\{ (i\vec{\tau}_2 \times \vec{\tau}_3)_a F_{\rho\pi}^{dis}(\vec{q}_2^2, \vec{q}_3^2) [\vec{q}_3 \cdot \vec{\sigma}_3] [\vec{k} \cdot (\vec{Q}_2 + (1 + \kappa_\rho) i\vec{\sigma}_2 \times \vec{q}_2)] - 2mk_0 \right. \\ & \quad \left. + 2 \leftrightarrow 3 \right\}. \end{aligned} \quad (C.36)$$

$\pi$ -Kontakt-Strom ( $A_1$ -Pol) +  $\rho\pi$ -Strom ( $A_1$ -Pol)

$$\begin{aligned} & \vec{j}_A^{(2)}(2, \pi\text{-Kontakt } (A_1\text{-Pol}) + \rho\pi \text{ (} A_1\text{-Pol)}, \vec{k}, \vec{q}_2, \vec{q}_3, \vec{Q}_2, \vec{Q}_3)_{23} \\ &= \frac{m_{A_1}^2}{m_{A_1}^2 - k_\mu^2} \vec{j}_A^{(2)}(2, \rho\pi - dir, \vec{k}, \vec{q}_2, \vec{q}_3, \vec{Q}_2, \vec{Q}_3)_{23} \\ & - \frac{1}{2} \frac{m_\pi^2 - k_\mu^2}{m_{A_1}^2 - k_\mu^2} \vec{j}_A^{(2)}(2, \rho\pi\pi, \vec{k}, \vec{q}_2, \vec{q}_3, \vec{Q}_2, \vec{Q}_3)_{23} \\ & + \frac{1}{64\pi^2 m^3} \frac{g_{\pi NN}^2}{4\pi} \left( \frac{1}{g_A} \frac{m_{A_1}^2}{m_{A_1}^2 - k_\mu^2} F_{\pi\rho}(k_\mu^2) \right) \\ & \quad \left\{ (i\vec{\tau}_2 \times \vec{\tau}_3)_a F_{\rho\pi}^{dis}(\vec{q}_2^2, \vec{q}_3^2) [\vec{q}_3 \cdot \vec{\sigma}_3] \right. \\ & \quad \left. ([\vec{k} \cdot \vec{q}_2] [\vec{Q}_2 + (1 + \kappa_\rho) i\vec{\sigma}_2 \times \vec{q}_2] - [\vec{k} \cdot (\vec{Q}_2 + (1 + \kappa_\rho) i\vec{\sigma}_2 \times \vec{q}_2) - 2mk_0] [\vec{q}_2]) \right. \\ & \quad \left. + 2 \leftrightarrow 3 \right\}. \end{aligned} \quad (C.37)$$

### Born-Ströme

Die sich aus den in Abbildung 3.6 dargestellten Born-Diagrammen ergebenden Operatoren können auf folgende Weise zerlegt werden,

$$\vec{j}_A(2, \vec{k}, \dots) = -\frac{f_A(k_\mu^2)}{g_A} \vec{j}_A^{bare}(2, \vec{k}, \dots) + \frac{f_P(k_\mu^2)}{4m^2 g_A} \vec{k} [\vec{k} \cdot \vec{j}_A^{bare}(2, \vec{k}, \dots)], \quad (C.38)$$

wobei  $g_A = -f_A(0) = 1.257$  wie in Ref. [5] definiert wurde. Daher reicht es aus, die “nackten (= bare)” Operatoren anzugeben.

#### $\pi$ -Vertex-Strom

$$\begin{aligned} & \vec{j}_A^{bare,(2)}(2, \pi\text{-Vertex}, \vec{k}, \vec{q}_2, \vec{q}_3, \vec{Q}_2, \vec{Q}_3)_{23} \\ &= -\frac{1}{16\pi^2 m^3} \frac{g_{\pi NN}^2}{4\pi} g_A \\ & \quad \left\{ F_\pi^{pro}(\vec{q}_3^2) [\vec{q}_3 \cdot \vec{\sigma}_3] \left( (i\vec{\tau}_2 \times \vec{\tau}_3)_a [\vec{Q}_2 + i\vec{\sigma}_2 \times \vec{k}] + (\vec{\tau}_3)_a [i\vec{\sigma}_2 \times \vec{Q}_2 + \vec{k}] \right) \right. \\ & \quad \left. + 2 \leftrightarrow 3 \right\}. \end{aligned} \quad (C.39)$$

#### $\pi$ -ps-pv-Strom

$$\begin{aligned} & \vec{j}_A^{bare,(2)}(2, \pi\text{-pspv}, \vec{k}, \vec{q}_2, \vec{q}_3, \vec{Q}_2, \vec{Q}_3)_{23} \\ &= -\frac{(1 + \tilde{\mu})}{4} \vec{j}_A^{bare,(2)}(2, \pi - vert, \vec{k}, \vec{q}_2, \vec{q}_3, \vec{Q}_2, \vec{Q}_3)_{23} \\ & \quad - \frac{(1 + \tilde{\mu})}{64\pi^2 m^3} \frac{g_{\pi NN}^2}{4\pi} g_A \\ & \quad \left\{ F_\pi^{pro}(\vec{q}_3^2) [\vec{Q}_3 \cdot \vec{\sigma}_3] \left( (i\vec{\tau}_2 \times \vec{\tau}_3)_a [\vec{q}_3] + (\vec{\tau}_3)_a [i\vec{\sigma}_2 \times \vec{q}_3] \right) + 2 \leftrightarrow 3 \right\}. \end{aligned} \quad (C.40)$$

#### $\pi$ -Retardierungs-Strom

$$\begin{aligned} & \vec{j}_A^{bare,(2)}(2, \pi\text{-Retardierung}, \vec{k}, \vec{q}_2, \vec{q}_3, \vec{Q}_2, \vec{Q}_3)_{23} \\ &= \frac{1}{64\pi^2 m^3} \frac{g_{\pi NN}^2}{4\pi} g_A \\ & \quad \left\{ F_\pi^{ret}(\vec{q}_3^2) [\vec{q}_3 \cdot \vec{\sigma}_3] \left( (i\vec{\tau}_2 \times \vec{\tau}_3)_a \left( [\vec{k} \cdot \vec{q}_3] [i\vec{\sigma}_2 \times \vec{q}_3] + [(\vec{Q}_2 + 3\vec{Q}_3) \cdot \vec{q}_3] [\vec{q}_3] \right) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + (\vec{\tau}_3)_a \left( [\vec{k} \cdot \vec{q}_3] [\vec{q}_3] + [(\vec{Q}_2 + 3\vec{Q}_3) \cdot \vec{q}_3] [i\vec{\sigma}_2 \times \vec{q}_3] \right) \right) \right. \\ & \quad \left. + 2 \leftrightarrow 3 \right\}. \end{aligned} \quad (C.41)$$

### C.2.3 $\Delta$ -Isobar-Ströme

Bei den  $\Delta$ -Isobar-Strömen beschränken wir uns wiederum auf die nicht-relativistische Ordnung, in der nur Einkörper-Operatoren zum räumlichen Anteil des axialen Stroms beitragen. Axiale MEC mit  $\Delta$ -Isobar-Anregung sind von relativistischer Natur und daher in dieser Arbeit nicht berücksichtigt worden.

#### $N\Delta$ -Übergangs-Strom

$$\vec{j}_A^{N \rightarrow \Delta (0)}(1, \vec{k}, \vec{Q}_1)_1 = \left( f_A^{N\Delta} [\vec{\sigma}_1^{N \rightarrow \Delta}] - \frac{f_P^{N\Delta}}{4m^2} [(\vec{k} \cdot \vec{\sigma}_1^{N \rightarrow \Delta}) \vec{k}] \right) \frac{1}{2} (\vec{\tau}_1^{N \rightarrow \Delta})_a. \quad (\text{C.42})$$

#### $\Delta$ -Diagonal-Strom

$$\vec{j}_A^{\Delta (0)}(1, \vec{k}, \vec{Q}_1)_1 = \left( f_A^{\Delta} [\vec{\sigma}_1^{\Delta}] - \frac{f_P^{\Delta}}{4m^2} [(\vec{k} \cdot \vec{\sigma}_1^{\Delta}) \vec{k}] \right) \frac{1}{2} (\vec{\tau}_1^{\Delta})_a. \quad (\text{C.43})$$

### C.3 Praktische Form der Operatoren

Um die Beiträge der in den vorangegangenen Abschnitten vorgestellten Operatoren numerisch zu berechnen, sind diese Operatoren durch Jacobi-Impulse auszudrücken und nach dem in Kapitel 4.3 beschriebenen Verfahren zu zerlegen. Die erhaltenden Tensorränge und Impulspotenzen dienen dann als Input für die entwickelten numerischen Programme. Zur vollständigen Operatorklassifizierung muß auch die Information über den externen Formfaktor, den Spin- und Isospinoperator sowie über die Propagatorfunktion in der Operatortabelle (siehe Kapitel 4.3) abgespeichert werden. Hierzu ordnen wir diesen Operatoranteilen die im folgenden aufgelisteten Zahlen zu.

#### Externe Formfaktoren

Die auftretenden externen elektroschwachen Formfaktoren werden durch den Formfaktor-Typ  $ft$  wie folgt numeriert:

$$ft = \left\{ \begin{array}{ll} 10 \text{ (11)} & \Longleftrightarrow f_1^{IS}(k_\mu^2) (f_1^{IV}(k_\mu^2)) \\ 20 \text{ (21)} & \Longleftrightarrow f_2^{IS}(k_\mu^2) (f_2^{IV}(k_\mu^2)) \\ 30 \text{ (31)} & \Longleftrightarrow f_1^{IS}(k_\mu^2) + 2f_2^{IS}(k_\mu^2) (f_1^{IV}(k_\mu^2) + 2f_2^{IV}(k_\mu^2)) \\ 40 \text{ (41)} & \Longleftrightarrow g_M^{IS}(k_\mu^2) (g_M^{IV}(k_\mu^2)) \\ 50 \text{ (51)} & \Longleftrightarrow g_E^{IS}(k_\mu^2) (g_E^{IV}(k_\mu^2)) \\ 60 \text{ (61)} & \Longleftrightarrow 2g_M^{IS}(k_\mu^2) - g_E^{IS}(k_\mu^2) (2g_M^{IV}(k_\mu^2) - g_E^{IV}(k_\mu^2)) \\ 70 \text{ (71)} & \Longleftrightarrow f_{\rho\pi\gamma}(k_\mu^2) (f_{\omega\pi\gamma}(k_\mu^2)) \\ 90 & \Longleftrightarrow g_{E0}^\Delta(k_\mu^2) \\ 91 & \Longleftrightarrow g_{M1}^\Delta(k_\mu^2) \\ 92 & \Longleftrightarrow g_{M1}^{N\Delta}(k_\mu^2) \\ 101 & \Longleftrightarrow f_A(k_\mu^2) \\ 102 & \Longleftrightarrow f_A^\Delta(k_\mu^2) \\ 103 & \Longleftrightarrow f_A^{N\Delta}(k_\mu^2) \\ 111 & \Longleftrightarrow f_P(k_\mu^2) \\ 112 & \Longleftrightarrow f_P^\Delta(k_\mu^2) \\ 113 & \Longleftrightarrow f_P^{N\Delta}(k_\mu^2) \\ 121 & \Longleftrightarrow F_{\pi\rho}(k_\mu^2) \end{array} \right.$$

$g_E(k_\mu^2) = f_1(k_\mu^2) + \frac{k_\mu^2}{4m^2} f_2(k_\mu^2)$ ,  $g_M(k_\mu^2) = f_1(k_\mu^2) + f_2(k_\mu^2)$  sind hierbei die Sachs-Formfaktoren des Nukleons. Der Index  $IS$  ( $IV$ ) bedeutet isoskalar (isovektoriell). In Kapitel 3.2 ist angegeben, wie diese Formfaktoren in der praktischen Rechnung gewählt worden sind.

### Spin- und Isospin-Operatoren

In den Einkörper-Operatoren treten die folgenden Spin-Operatoren  $s_1^{(d)}(st)$  auf, die wir durch den Rang  $d$  und den Operator-Typ  $st$  klassifizieren:

$$s_1^{(d)}(st) = \begin{cases} 1 & \text{falls } st = 1 \quad d = 0 \\ \vec{\sigma}_1 & \text{falls } st = 2 \quad d = 1 \\ \vec{\sigma}_1^\Delta & \text{falls } st = 3 \quad d = 1 \\ \vec{\sigma}_1^{N \rightarrow \Delta} & \text{falls } st = 4 \quad d = 1 \end{cases}$$

Die Spin-Anteile  $S_{23}^{(d)}(st)$  der Zweikörper-Operatoren werden auf folgende Weise klassifiziert:

$$S_{23}^{(d)}(st) = \begin{cases} 1 & \text{falls } st = 1 \quad d = 0 \\ \vec{\sigma}_2 & \text{falls } st = 2 \quad d = 1 \\ \vec{\sigma}_3 & \text{falls } st = 3 \quad d = 1 \\ \vec{\sigma}_2 \cdot \vec{\sigma}_3 & \text{falls } st = 4 \quad d = 0 \\ \vec{\sigma}_2 + \vec{\sigma}_3 & \text{falls } st = 5 \quad d = 1 \\ \vec{\sigma}_2 - \vec{\sigma}_3 & \text{falls } st = 6 \quad d = 1 \\ \left\{ \sigma_2^{(1)} \otimes \sigma_3^{(1)} \right\}^{(t)} & \text{falls } st = 7 \quad d = t \\ i\vec{\sigma}_2 \times \vec{\sigma}_3 & \text{falls } st = 8 \quad d = 1 \\ \vec{\sigma}_3^{N \rightarrow \Delta} & \text{falls } st = 13 \quad d = 1 \\ \vec{\sigma}_2 \cdot \vec{\sigma}_3^{N \rightarrow \Delta} & \text{falls } st = 14 \quad d = 0 \\ \vec{\sigma}_2 + \vec{\sigma}_3^{N \rightarrow \Delta} & \text{falls } st = 15 \quad d = 1 \\ \vec{\sigma}_2 - \vec{\sigma}_3^{N \rightarrow \Delta} & \text{falls } st = 16 \quad d = 1 \\ \left\{ \sigma_2^{(1)} \otimes \sigma_3^{N \rightarrow \Delta (1)} \right\}^{(t)} & \text{falls } st = 17 \quad d = t \\ i\vec{\sigma}_2 \times \vec{\sigma}_3^{N \rightarrow \Delta} & \text{falls } st = 18 \quad d = 1 \end{cases}$$

Die Isospin-Anteile  $t_1^{(f)}(it)$  und  $T_{23}^{(f)}(it)$  der Stromoperatoren haben dieselbe Struktur wie die Spin-Anteile, die Pauli-Matrizen im Spinraum  $\vec{\sigma}_i$  sind lediglich durch die Pauli-Matrizen im Isospinraum  $\vec{\tau}_i$  zu ersetzen. Daher klassifizieren wir die Isospin-Operatoren auf analoge Weise durch den Rang  $f$  und Operator-Typ  $it$ .

### Propagatorfunktionen

In der praktischen Rechnung führen wir die modifizierten Propagatorfunktionen ein, die die starken Kopplungskonstanten  $g_{BNN}/\sqrt{4\pi}$  enthalten,

$$\tilde{F}_B^{con}(\vec{q}_i^2) = \frac{g_{BNN}^2}{4\pi} \frac{f_{BNN}^2(\vec{q}_i^2)}{m_B^2 + \vec{q}_i^2}, \quad (C.44)$$

$$\tilde{F}_B^{ret}(\vec{q}_i^2) = -\frac{d}{d\vec{q}_i^2} \tilde{F}_B^{con}(\vec{q}_i^2), \quad (C.45)$$

$$\tilde{F}_B^{mes}(\vec{q}_i^2, \vec{q}_j^2) = -\frac{1}{\vec{q}_i^2 - \vec{q}_j^2} \left( \tilde{F}_B^{con}(\vec{q}_i^2) - \tilde{F}_B^{con}(\vec{q}_j^2) \right), \quad (C.46)$$

$$\tilde{F}_{B_1, B_2}^{dis}(\vec{q}_i^2, \vec{q}_j^2) = \frac{g_{B_1 NN}}{\sqrt{4\pi}} \frac{g_{B_2 NN}}{\sqrt{4\pi}} \frac{f_{B_1 NN}(\vec{q}_i^2)}{m_{B_1}^2 + \vec{q}_i^2} \frac{f_{B_2 NN}(\vec{q}_j^2)}{m_{B_2}^2 + \vec{q}_j^2}, \quad (C.47)$$

$$\tilde{F}_B^{con, N\Delta}(\vec{q}_i^2) = \frac{g_{BNN}}{\sqrt{4\pi}} \frac{g_{BN\Delta}}{\sqrt{4\pi}} \frac{f_{BNN}(\vec{q}_i^2) f_{BN\Delta}(\vec{q}_i^2)}{m_B^2 + \vec{q}_i^2}, \quad (C.48)$$

$$\tilde{F}_B^{mes, N\Delta}(\vec{q}_i^2, \vec{q}_j^2) = -\frac{1}{\vec{q}_i^2 - \vec{q}_j^2} \left( \tilde{F}_B^{con, N\Delta}(\vec{q}_i^2) - \tilde{F}_B^{con, N\Delta}(\vec{q}_j^2) \right), \quad (C.49)$$

$$\tilde{F}_{B_1, B_2}^{dis, N\Delta}(\vec{q}_i^2, \vec{q}_j^2) = \frac{g_{B_1 NN}}{\sqrt{4\pi}} \frac{g_{B_2 N\Delta}}{\sqrt{4\pi}} \frac{f_{B_1 NN}(\vec{q}_i^2)}{m_{B_1}^2 + \vec{q}_i^2} \frac{f_{B_2 N\Delta}(\vec{q}_j^2)}{m_{B_2}^2 + \vec{q}_j^2}. \quad (C.50)$$

Den in der Praxis auftretenden Propagatorfunktionen  $F_{B_1, B_2}^{iex}(\vec{q}_2^2, \vec{q}_3^2)$  ordnen wir die folgenden Zahlen zu:

$$F_{B_1, B_2}^{iex}(\vec{q}_2^2, \vec{q}_3^2) = \begin{cases} \tilde{F}_{B_1}^{con}(\vec{q}_3^2) & \text{falls } iex = 1 \\ \tilde{F}_{B_1}^{ret}(\vec{q}_3^2) & \text{falls } iex = 2 \\ \tilde{F}_{B_1}^{mes}(\vec{q}_2^2, \vec{q}_3^2) & \text{falls } iex = 3 \\ \tilde{F}_{B_1, B_2}^{dis}(\vec{q}_2^2, \vec{q}_3^2) & \text{falls } iex = 4 \\ \tilde{F}_{B_1}^{con, N\Delta}(\vec{q}_3^2) & \text{falls } iex = 5 \\ \tilde{F}_{B_1}^{con, N\Delta}(\vec{q}_2^2) & \text{falls } iex = 6 \\ \tilde{F}_{B_1}^{mes, N\Delta}(\vec{q}_2^2, \vec{q}_3^2) & \text{falls } iex = 7 \\ \tilde{F}_{B_1, B_2}^{dis, N\Delta}(\vec{q}_2^2, \vec{q}_3^2) & \text{falls } iex = 8 \end{cases}$$

Das im Operator auftauchende Meson wird dabei durch die Zahl  $B$  charakterisiert:

$$B = \begin{cases} 1 & \Longleftrightarrow \pi \\ 2 & \Longleftrightarrow \rho \\ 3 & \Longleftrightarrow \omega \end{cases}$$



# Anhang D

## Herleitung der Master-Formeln für die RME

In diesem Anhang sollen die Master-Formeln (4.43) und (4.44) bewiesen werden, die zur numerischen Berechnung der reduzierten Multipolmatrixelemente (RME) für Ein- und Zweikörper-Ströme verwendet worden sind. Die Stromoperatoren liegen ursprünglich (siehe Anhang C) in der Form

$$\langle \vec{p}_1' | T_\lambda^{(a)}(1, \vec{k})_1 | \vec{p}_1 \rangle = \delta^{(3)}(\vec{q}_1 - \vec{k}) T_\lambda^{(a)}(1, \vec{k}, \vec{Q}_1)_1, \quad (\text{D.1})$$

$$\langle \vec{p}_2' \vec{p}_3' | T_\lambda^{(a)}(2, \vec{k})_{23} | \vec{p}_2 \vec{p}_3 \rangle = \delta^{(3)}(\vec{q}_2 + \vec{q}_3 - \vec{k}) T_\lambda^{(a)}(2, \vec{k}, \vec{q}_2, \vec{q}_3, \vec{Q}_2, \vec{Q}_3)_{23}, \quad (\text{D.2})$$

vor, mit  $\vec{q}_i = \vec{p}_i' - \vec{p}_i$  und  $\vec{Q}_i = \vec{p}_i' + \vec{p}_i$ . Bildet man das Matrixelement dieser Operatoren im Impulsraum des Drei-Teilchen-Systems, so lassen sich durch Abspalten der impulserhaltenden  $\delta$ -Funktion,

$$\langle \vec{P}' \vec{p}' \vec{q}' | T_\lambda^{(a)}(\vec{k}) | \vec{P} \vec{p} \vec{q} \rangle = \delta^{(3)}(\vec{P}' - \vec{P} - \vec{k}) \langle \vec{p}' \vec{q}' | t_\lambda^{(a)}(\vec{k}, \alpha) | \vec{p} \vec{q} \rangle, \quad (\text{D.3})$$

die effektiven, nur noch auf innere Freiheitsgrade wirkenden Operatoren  $t_\lambda^{(a)}(\vec{k}, \alpha)$  einführen. Hierbei benutzen wir ein kollineares Bezugssystem, welches durch den über die Relation  $\vec{P} = \frac{1}{2}(\alpha - 1)\vec{k}$  definierten Bezugssystemparameter  $\alpha$  charakterisiert wird.  $\vec{P}$ ,  $\vec{p}$  und  $\vec{q}$  sind die im Anhang A angegebenen Jacobi-Impulse. Die den ursprünglichen Operatoren (D.1) und (D.2) entsprechenden effektiven Operatoren sind gegeben durch,

$$\langle \vec{p}' \vec{q}' | t_\lambda^{(a)}(1, \vec{k})_1 | \vec{p} \vec{q} \rangle = \delta^{(3)}(\vec{p}_- ) \delta^{(3)}(\vec{q}_- + \frac{2}{3}\vec{k}) T_\lambda^{(a)}(1, \vec{k}, \vec{Q}_1)_1 \Big|_{\vec{Q}_1 = -\vec{q}_+ + \frac{\alpha}{3}\vec{k}} \quad (\text{D.4})$$

$$\langle \vec{p}' \vec{q}' | t_\lambda^{(a)}(2, \vec{k})_{23} | \vec{p} \vec{q} \rangle = \delta^{(3)}(\vec{q}_- - \frac{1}{3}\vec{k}) T_\lambda^{(a)}(2, \vec{k}, \vec{q}_2, \vec{q}_3, \vec{Q}_2, \vec{Q}_3)_{23} \Big|_{\substack{\vec{q}_{2,3} = \frac{\vec{k}}{2} \pm \vec{p}_- \\ \vec{Q}_{2,3} = \pm \vec{p}_+ + \frac{\vec{q}_+}{2} + \frac{\alpha}{3}\vec{k}}} \quad (\text{D.5})$$

mit  $\vec{p}_\pm = \vec{p}' \pm \vec{p}$  und  $\vec{q}_\pm = \vec{q}' \pm \vec{q}$ . Hier und im folgenden führen wir der Übersichtlichkeit halber  $\alpha$  nicht mehr explizit als Argument auf.

In Kapitel 4 haben wir beschrieben, daß sich alle in unseren Rechnungen verwendeten Operatoren nach folgenden Schema zerlegen lassen,

$$\begin{aligned}
& \langle \vec{p}' \vec{q}' | t_\lambda^{(a)}(1, \vec{k})_1 | \vec{p} \vec{q} \rangle \\
&= \delta^{(3)}(\vec{p}_-) \delta^{(3)}(\vec{q}_- + \frac{2}{3}\vec{k}) \frac{k_0^{pwk_0}}{m^{pwm} m_\Delta^{pwm_\Delta}} f_{ft}(k_\mu^2) t_1^{(f)}(it) \\
&\quad \sum_{i=1}^{nts} C_i k^{pwk_i} q_+^{pwq_i} (4\pi)^2 \left\{ Y^{(b_i)}(\hat{k}) \otimes [\mathcal{O}^{(c_i)}(0, 0, 0, c_i) \otimes s_1^{(d_i)}(st_i)]^{(e_i)} \right\}_\lambda^{(a)} \\
&= \frac{k_0^{pwk_0}}{m^{pwm} m_\Delta^{pwm_\Delta}} f_{ft}(k_\mu^2) t_1^{(f)}(it) \sum_{i=1}^{nts} C_i k^{pwk_i} \\
&\quad [\delta^{(3)}(\vec{p}_-)] [\delta^{(3)}(\vec{q}_- + \frac{2}{3}\vec{k}) q_+^{pwq_i}] \\
&\quad (4\pi)^2 \left\{ Y^{(b_i)}(\hat{k}) \otimes [\mathcal{O}^{(c_i)}(0, 0, 0, c_i) \otimes s_1^{(d_i)}(st_i)]^{(e_i)} \right\}_\lambda^{(a)}, \tag{D.6}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \langle \vec{p}' \vec{q}' | t_\lambda^{(a)}(2, \vec{k})_{23} | \vec{p} \vec{q} \rangle \\
&= \delta^{(3)}(\vec{q}_- - \frac{1}{3}\vec{k}) \frac{k_0^{pwk_0}}{m^{pwm} m_\Delta^{pwm_\Delta}} f_{ft}(k_\mu^2) T_{23}^{(f)}(it) F_{B_1, B_2}^{ie x}(k, p_-, v_p) \\
&\quad \sum_{i=1}^{nts} C_i k^{pwk_i} p_+^{pwp+i} p_-^{pwp-i} q_+^{pwq_i} \\
&\quad (4\pi)^2 \left\{ Y^{(b_i)}(\hat{k}) \otimes [\mathcal{O}^{(c_i)}(c_{p+i}, c_{p-i}, c_{p_i}, c_{q_i}) \otimes S_{23}^{(d_i)}(st_i)]^{(e_i)} \right\}_\lambda^{(a)} \\
&= \frac{k_0^{pwk_0}}{m^{pwm} m_\Delta^{pwm_\Delta}} f_{ft}(k_\mu^2) T_{23}^{(f)}(it) \sum_{i=1}^{nts} C_i k^{pwk_i} \\
&\quad [F_{B_1, B_2}^{ie x}(k, p_-, v_p) p_+^{pwp+i} p_-^{pwp-i}] [\delta^{(3)}(\vec{q}_- - \frac{1}{3}\vec{k}) q_+^{pwq_i}] \\
&\quad (4\pi)^2 \left\{ Y^{(b_i)}(\hat{k}) \otimes [\mathcal{O}^{(c_i)}(c_{p+i}, c_{p-i}, c_{p_i}, c_{q_i}) \otimes S_{23}^{(d_i)}(st_i)]^{(e_i)} \right\}_\lambda^{(a)}, \tag{D.7}
\end{aligned}$$

wobei der orbitale Operator

$$\mathcal{O}_{m_{c_i}}^{(c_i)}(c_{p+i}, c_{p-i}, c_{p_i}, c_{q_i}) = \left\{ \left( Y^{(c_{p+i})}(\hat{p}_+) \otimes Y^{(c_{p-i})}(\hat{p}_-) \right)^{(c_{p_i})} \otimes Y^{(c_{q_i})}(\hat{q}_+) \right\}_{m_{c_i}}^{(c_i)}$$

eingeführt worden ist.

Für die allgemeinen Ein- und Zweikörper-Operatoren (D.6) und (D.7) wollen wir nun die Master-Formeln (4.43) und (4.44) für die RME

$$\begin{aligned} & \langle p'q'[(L'l')\mathcal{L}'(S's')\mathcal{S}']J'; (T't')\mathcal{T}' || T^{([Ia]j)}(k) || \Psi_B \rangle \\ &= \frac{(-i)^j}{4\pi} \langle p'q'[(L'l')\mathcal{L}'(S's')\mathcal{S}']J'; (T't')\mathcal{T}' || \int d^2\hat{k} \left( Y^{(I)}(\hat{k}) \otimes t^{(a)}(\vec{k}) \right)^{(j)} || \Psi_B \rangle \end{aligned}$$

beweisen. Hierzu leiten wir zunächst für den verallgemeinerten Operator

$$\begin{aligned} \langle \vec{p}'\vec{q}' | t_\lambda^{(a)}(\vec{k}) | \vec{p}\vec{q} \rangle &= f_p(k, p_-, p_+, v_p) f_q(k, q_-, q_+, v_q) \\ & (4\pi)^2 \left\{ Y^{(b)}(\hat{k}) \otimes [\mathcal{O}^{(c)}(c_{p_+}, c_{p_-}, c_p, c_q) \otimes S^{(d)}]^{(e)} \right\}_\lambda^{(a)} \end{aligned} \quad (\text{D.8})$$

eine Master-Formel her.  $f_p(k, p_-, p_+, v_p)$  und  $f_q(k, q_-, q_+, v_q)$  sind hierbei beliebige skalare Funktionen, die u.a. von den Winkeln  $v_p = \hat{k} \cdot \hat{p}_-$  und  $v_q = \hat{k} \cdot \hat{q}_-$  abhängen können. Durch die Wahl der Ränge  $c_{p_+} = c_{p_-} = c_p = 0$  und  $c_q = c$ , des Spinoperators  $S^{(d)} = s_1^{(d)}(st)$  sowie der Funktionen

$$\begin{aligned} f_p(k, p_-, p_+, v_p) &= \delta^{(3)}(\vec{p}_-), \\ f_q(k, q_-, q_+, v_q) &= \delta^{(3)}(\vec{q}_- + \frac{2}{3}\vec{k}) q_+^{pwq}, \end{aligned} \quad (\text{D.9})$$

spezialisieren wir diese Formel anschließend für Einkörper-Ströme  $t_\lambda^{(a)}(1, \vec{k})_1$ . Die entsprechende Master-Formel für Zweikörper-Ströme  $t_\lambda^{(a)}(2, \vec{k})_{23}$  erhalten wir schließlich durch die Wahl  $S^{(d)} = S_{23}^{(d)}(st)$  und

$$\begin{aligned} f_p(k, p_-, p_+, v_p) &= F_{B_1, B_2}^{iex}(k, p_-, v_p) p_+^{pwp+} p_-^{pwp-}, \\ f_q(k, q_-, q_+, v_q) &= \delta^{(3)}(\vec{q}_- - \frac{1}{3}\vec{k}) q_+^{pwq}. \end{aligned} \quad (\text{D.10})$$

Die in (D.6) und (D.7) auftretenden Operatoranteile  $k_0^{pwk_0}/(m^{pwm}m_\Delta^{pwm\Delta}) f_{ft}(k_\mu^2)$  und  $C_i k^{pwk_i}$  können sofort aus dem Matrixelement herausgezogen werden und spielen ebenso wie die Isospin-Anteile  $t_1^{(f)}(it)$  und  $T_{23}^{(f)}(it)$ , die separat behandelt werden können, für den nachfolgenden Beweis keine Rolle. Diese Anteile werden von nun an weggelassen, da sie unnötigen Ballast für die weiteren Formeln darstellen. In den endgültigen Formeln können wir sie problemlos wieder hinzufügen.

## D.1 Master-Formel für den verallgemeinerten Operator

### 1. Schritt: $\hat{k}$ -Integration

Zuerst koppeln wir die Kugelfunktionen  $Y^{(I)}(\hat{k})$  und  $Y^{(b)}(\hat{k})$  mit Hilfe der Formel (A.29),

$$\begin{aligned}
& \langle \vec{p}' \vec{q}' | T_{m_j}^{([Ia]j)}(k) | \vec{p} \vec{q} \rangle \\
&= \frac{(-i)^j}{4\pi} \int d^2 \hat{k} \left( Y^{(I)}(\hat{k}) \otimes \langle \vec{p}' \vec{q}' | t^{(a)}(\vec{k}) | \vec{p} \vec{q} \rangle \right)_{m_j}^{(j)} \\
&= (-i)^j 4\pi \int d^2 \hat{k} f_p(k, p_-, p_+, v_p) f_q(k, q_-, q_+, v_q) \\
&\quad \left( Y^{(I)}(\hat{k}) \otimes \left\{ Y^{(b)}(\hat{k}) \otimes [\mathcal{O}^{(c)}(c_{p_+}, c_{p_-}, c_p, c_q) \otimes S^{(d)}]^{(e)} \right\}^{(a)} \right)_{m_j}^{(j)} \\
&= (-i)^j (4\pi)^{\frac{1}{2}} \sum_{\kappa} RK(a, b, e, j, I; \kappa) \int d^2 \hat{k} f_p(k, p_-, p_+, v_p) f_q(k, q_-, q_+, v_q) \\
&\quad \left( Y^{(\kappa)}(\hat{k}) \otimes [\mathcal{O}^{(c)}(c_{p_+}, c_{p_-}, c_p, c_q) \otimes S^{(d)}]^{(e)} \right)_{m_j}^{(j)}. \tag{D.11}
\end{aligned}$$

Hierbei wurde die Umkopplungsfunktion

$$RK(a, b, e, j, I; \kappa) = (-)^{b+e+j+I+\kappa} \hat{a} \hat{b} \hat{I} \hat{\kappa} \begin{pmatrix} I & b & \kappa \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} b & e & a \\ j & I & \kappa \end{Bmatrix} \tag{D.12}$$

eingeführt. Danach entwickeln wir die  $v_p$ - und  $v_q$ -Abhängigkeit in den skalaren Funktionen  $f_p(k, p_-, p_+, v_p)$  und  $f_q(k, q_-, q_+, v_q)$  und führen die  $\hat{k}$ -Integration gemäß der Integrationsformel (A.30) aus,

$$\begin{aligned}
& \langle \vec{p}' \vec{q}' | T_{m_j}^{([Ia]j)}(k) | \vec{p} \vec{q} \rangle \\
&= (-i)^j (4\pi)^2 \sum_{\kappa} RK(a, b, e, j, I; \kappa) \\
&\quad \sum_{\varphi_p=0}^{\infty} \hat{\varphi}_p(-)^{\varphi_p} \sum_{\varphi_q=0}^{\infty} \hat{\varphi}_q(-)^{\varphi_q} f_{p, \varphi_p}(k, p_-, p_+) f_{q, \varphi_q}(k, q_-, q_+) \begin{pmatrix} \varphi_p & \varphi_q & \kappa \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\quad \left( [Y^{(\varphi_p)}(\hat{p}_-) \otimes Y^{(\varphi_q)}(\hat{q}_-)]^{(\kappa)} \otimes [\mathcal{O}^{(c)}(c_{p_+}, c_{p_-}, c_p, c_q) \otimes S^{(d)}]^{(e)} \right)_{m_j}^{(j)}. \tag{D.13}
\end{aligned}$$

Die Entwicklungskoeffizienten sind dabei wie folgt zu berechnen,

$$f_{p, \varphi_p}(k, p_-, p_+) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 dv_p f_p(k, p_-, p_+, v_p) P_{\varphi_p}(v_p), \tag{D.14}$$

$$f_{q, \varphi_q}(k, q_-, q_+) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 dv_q f_q(k, q_-, q_+, v_q) P_{\varphi_q}(v_q). \tag{D.15}$$

## 2. Schritt: Entkopplung von Spin - und Orbital-Anteil

Mit Hilfe von Formel (A.14a) entkoppeln wir in (D.13) Spin- und Orbital-Anteil,

$$\begin{aligned}
 T_{m_j}^{([Ia]j)}(k) &= \frac{(-i)^j}{4\pi} \int d^2\hat{k} \left( Y^{(I)}(\hat{k}) \otimes t^{(a)}(\vec{k}) \right)_{m_j}^{(j)} \\
 &= (-i)^j (4\pi)^2 \sum_{\kappa} RK(a, b, e, j, I; \kappa) \sum_{\sigma} \hat{e}\hat{\sigma}(-)^{\kappa+c+d+j} \left\{ \begin{array}{ccc} c & d & e \\ j & \kappa & \sigma \end{array} \right\} \\
 &\quad \sum_{\varphi_p=0}^{\infty} \hat{\varphi}_p(-)^{\varphi_p} \sum_{\varphi_q=0}^{\infty} \hat{\varphi}_q(-)^{\varphi_q} \left( \begin{array}{ccc} \varphi_p & \varphi_q & \kappa \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \\
 &\quad \left( R^{(\sigma)}(\varphi_p, \varphi_q, \kappa, c_{p+}, c_{p-}, c_p, c_q, c) \otimes S^{(d)} \right)_{m_j}^{(j)}. \tag{D.16}
 \end{aligned}$$

Der orbitale Operator  $R^{(\sigma)}(\varphi_p, \varphi_q, \kappa, c_{p+}, c_{p-}, c_p, c_q, c)$  ist über sein Matrixelement

$$\begin{aligned}
 \langle \vec{p}' \vec{q}' | R_{m_{\sigma}}^{(\sigma)}(\varphi_p, \varphi_q, \kappa, c_{p+}, c_{p-}, c_p, c_q, c) | \vec{p} \vec{q} \rangle \\
 = f_{p, \varphi_p}(k, p_-, p_+) f_{q, \varphi_q}(k, q_-, q_+) \\
 \left\{ \left( Y^{(\varphi_p)}(\hat{p}_-) \otimes Y^{(\varphi_q)}(\hat{q}_-) \right)^{(\kappa)} \otimes \mathcal{O}^{(c)}(c_{p+}, c_{p-}, c_p, c_q) \right\}_{m_{\sigma}}^{(\sigma)} \tag{D.17}
 \end{aligned}$$

definiert.

## 3. Schritt: Entkopplung von $p$ - und $q$ -Anteil im orbitalen Operator

Wir benutzen nun die Formeln (A.5) und (A.15a), um den orbitalen Operator (D.17) in einen auf Paar 23 wirkenden  $p$ -Anteil und einen auf Teilchen 1 wirkenden  $q$ -Anteil zu entkoppeln. Im  $p$ -Anteil koppeln wir anschließend mit Hilfe von (A.29) die Kugelfunktionen  $Y^{(\varphi_p)}(\hat{p}_-)$  und  $Y^{(c_{p-})}(\hat{p}_-)$ . Wir erhalten,

$$\begin{aligned}
 R_{m_{\sigma}}^{(\sigma)}(\varphi_p, \varphi_q, \kappa, c_{p+}, c_{p-}, c_p, c_q, c) \\
 = \frac{1}{(4\pi)^{\frac{1}{2}}} (-)^{\kappa+c+\sigma} \sum_{\gamma_p \gamma_q} \hat{\gamma}_p \hat{\gamma}_q \hat{c} \hat{\kappa} \left\{ \begin{array}{ccc} c_p & c_q & c \\ \varphi_p & \varphi_q & \kappa \\ \gamma_p & \gamma_q & \sigma \end{array} \right\} \sum_{\rho} RK(c_p, c_{p-}, c_{p+}, \gamma_p, \varphi_p; \rho) \\
 \left\{ P^{(\gamma_p)}(c_{p+}, \rho, \varphi_p) \otimes Q^{(\gamma_q)}(c_q, \varphi_q, \varphi_q) \right\}_{m_{\sigma}}^{(\sigma)}, \tag{D.18}
 \end{aligned}$$

wobei die Operatoren  $P^{(\gamma_p)}(c_{p+}, \rho, \varphi_p)$  und  $Q^{(\gamma_q)}(c_q, \varphi_q, \varphi_q)$  wiederum über ihre Impulsraummatrixelemente definiert sind,

$$\langle \vec{p}' | P_{m_{\gamma_p}}^{(\gamma_p)}(c_{p+}, \rho, \varphi_p) | \vec{p} \rangle = f_{p, \varphi_p}(k, p_-, p_+) \left\{ Y^{(c_{p+})}(\hat{p}_+) \otimes Y^{(\rho)}(\hat{p}_-) \right\}_{m_{\gamma_p}}^{(\gamma_p)}, \tag{D.19}$$

$$\langle \vec{q}' | Q_{m_{\gamma_q}}^{(\gamma_q)}(c_q, \varphi_q, \varphi_q) | \vec{q} \rangle = f_{q, \varphi_q}(k, q_-, q_+) \left\{ Y^{(c_q)}(\hat{q}_+) \otimes Y^{(\varphi_q)}(\hat{q}_-) \right\}_{m_{\gamma_q}}^{(\gamma_q)}. \tag{D.20}$$

#### 4. Schritt:

##### Matrizelement des Multipoloperators zwischen Partialwellen

Nach den vorbereitenden Schritten 2 und 3 sind wir nun in der Lage, das reduzierte Matrizelement des Multipoloperators zwischen Partialwellenbasiszuständen zu berechnen. Mit Hilfe der Formel (A.6) läßt sich das gesamte Matrizelement in Untermatrizelemente des Spin-Anteils und der orbitalen  $p$ - und  $q$ -Anteile zerlegen,

$$\begin{aligned}
& \langle p'q'[(L'l')\mathcal{L}'(S's')\mathcal{S}']J' || T^{([Ia]j)}(k) || pq[(Ll)\mathcal{L}(Ss)\mathcal{S}]J \rangle \\
&= (-i)^j (4\pi)^2 \sum_{\kappa} RK(a, b, e, j, I; \kappa) \sum_{\sigma} \hat{e} \hat{\sigma} (-)^{\kappa+c+d+j} \left\{ \begin{matrix} c & d & e \\ j & \kappa & \sigma \end{matrix} \right\} \\
&\quad \sum_{\varphi_p=0}^{\infty} \hat{\varphi}_p(-)^{\varphi_p} \sum_{\varphi_q=0}^{\infty} \hat{\varphi}_q(-)^{\varphi_q} \left( \begin{matrix} \varphi_p & \varphi_q & \kappa \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \right) \\
&\quad \langle p'q'[(L'l')\mathcal{L}'(S's')\mathcal{S}']J' || (R^{(\sigma)}(\dots) \otimes S^{(d)})^{(j)} || pq[(Ll)\mathcal{L}(Ss)\mathcal{S}]J \rangle \\
&= (-i)^j (4\pi)^2 \sum_{\kappa} RK(a, b, e, j, I; \kappa) \sum_{\sigma} \hat{e} \hat{\sigma} (-)^{\kappa+c+d+j} \left\{ \begin{matrix} c & d & e \\ j & \kappa & \sigma \end{matrix} \right\} \\
&\quad \sum_{\varphi_p=0}^{\infty} \hat{\varphi}_p(-)^{\varphi_p} \sum_{\varphi_q=0}^{\infty} \hat{\varphi}_q(-)^{\varphi_q} \left( \begin{matrix} \varphi_p & \varphi_q & \kappa \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \right) \hat{J}' \hat{J} \hat{j} \left\{ \begin{matrix} \mathcal{L}' & \mathcal{L} & \sigma \\ \mathcal{S}' & \mathcal{S} & d \\ J' & J & j \end{matrix} \right\} \\
&\quad \langle p'q'[(L'l')\mathcal{L}'] || R^{(\sigma)}(\dots) || pq[(Ll)\mathcal{L}] \rangle \langle (S's')\mathcal{S}' || S^{(d)} || (Ss)\mathcal{S} \rangle \\
&= (-i)^j (4\pi)^{\frac{3}{2}} \langle (S's')\mathcal{S}' || S^{(d)} || (Ss)\mathcal{S} \rangle \\
&\quad \sum_{\kappa} RK(a, b, e, j, I; \kappa) \sum_{\sigma} RS(c, d, e, j; \mathcal{L}', \mathcal{S}', J', \mathcal{L}, \mathcal{S}, J; \kappa, \sigma) \\
&\quad \sum_{\varphi_p=0}^{\infty} \hat{\varphi}_p(-)^{\varphi_p} \sum_{\varphi_q=0}^{\infty} \hat{\varphi}_q(-)^{\varphi_q} \left( \begin{matrix} \varphi_p & \varphi_q & \kappa \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \right) (-)^{\kappa+c+\sigma} \sum_{\gamma_p \gamma_q} \hat{\gamma}_p \hat{\gamma}_q \hat{c} \hat{\kappa} \\
&\quad \left\{ \begin{matrix} c_p & c_q & c \\ \varphi_p & \varphi_q & \kappa \\ \gamma_p & \gamma_q & \sigma \end{matrix} \right\} \hat{\mathcal{L}}' \hat{\mathcal{L}} \hat{\sigma} \left\{ \begin{matrix} L' & L & \gamma_p \\ l' & l & \gamma_q \\ \mathcal{L}' & \mathcal{L} & \sigma \end{matrix} \right\} \sum_{\rho} RK(c_p, c_{p-}, c_{p+}, \gamma_p, \varphi_p; \rho) \\
&\quad \langle p'L' || P^{(\gamma_p)}(c_{p+}, \rho, \varphi_p) || pL \rangle \langle q'l' || Q^{(\gamma_q)}(c_q, \varphi_q, \varphi_q) || ql \rangle. \tag{D.21}
\end{aligned}$$

Einige auftretende geometrische Symbole wurden in der Umkopplungsfunktion

$$\begin{aligned}
& RS(c, d, e, j; \mathcal{L}', \mathcal{S}', J', \mathcal{L}, \mathcal{S}, J; \kappa, \sigma) \\
&= (-)^{\kappa+c+d+j} \hat{J}' \hat{J} \hat{j} \hat{e} \hat{\sigma} \left\{ \begin{matrix} c & d & e \\ j & \kappa & \sigma \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \mathcal{L}' & \mathcal{L} & \sigma \\ \mathcal{S}' & \mathcal{S} & d \\ J' & J & j \end{matrix} \right\} \tag{D.22}
\end{aligned}$$

zusammengefaßt. Wegen des 3j Symbols gilt  $(-)^{\varphi_p+\varphi_q+\kappa} = 1$ .

Für das gesuchte Matrixelement des Multipoloperators zwischen Partialwellen-basiszustand und Drei-Teilchen-Bindungszustand erhalten wir,

$$\begin{aligned}
& \langle p'q'[(L'l')\mathcal{L}'(S's')\mathcal{S}']J' || T^{([Ia]j)}(k) || \Psi_B \rangle \\
&= \sum_{\nu=\{Ll\mathcal{L}Ss\mathcal{S}\}} \int_0^\infty p^2 dp \int_0^\infty q^2 dq \\
& \quad \langle p'q'[(L'l')\mathcal{L}'(S's')\mathcal{S}']J' || T^{([Ia]j)}(k) || pq[(Ll)\mathcal{L}(Ss)\mathcal{S}] \frac{1}{2} \rangle \langle pq\nu | \Psi_B \rangle \\
&= (-i)^j (4\pi)^{\frac{3}{2}} \sum_{\nu=\{Ll\mathcal{L}Ss\mathcal{S}\}} \langle (S's')\mathcal{S}' || S^{(d)} || (Ss)\mathcal{S} \rangle \\
& \quad \sum_{\kappa} RK(a, b, e, j, I; \kappa) \sum_{\sigma} RS(c, d, e, j; \mathcal{L}', \mathcal{S}', J', \mathcal{L}, \mathcal{S}, \frac{1}{2}; \kappa, \sigma) \\
& \quad \sum_{\gamma_p \varphi_p \gamma_q \varphi_q} (-)^{c+\sigma} \hat{\gamma}_p \hat{\varphi}_p \hat{\gamma}_q \hat{\varphi}_q \hat{c} \hat{\kappa} \hat{\sigma} \hat{\mathcal{L}}' \hat{\mathcal{L}} \begin{pmatrix} \varphi_p & \varphi_q & \kappa \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
& \quad \left\{ \begin{matrix} c_p & c_q & c \\ \varphi_p & \varphi_q & \kappa \\ \gamma_p & \gamma_q & \sigma \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} L' & L & \gamma_p \\ l' & l & \gamma_q \\ \mathcal{L}' & \mathcal{L} & \sigma \end{matrix} \right\} \sum_{\rho} RK(c_p, c_{p-}, c_{p+}, \gamma_p, \varphi_p; \rho) \\
& \quad \int_0^\infty p^2 dp \langle p' L' || P^{(\gamma_p)}(c_{p+}, \rho, \varphi_p) || pL \rangle \int_0^\infty q^2 dq \langle q' l' || Q^{(\gamma_q)}(c_q, \varphi_q, \varphi_q) || ql \rangle \langle pq\nu | \Psi_B \rangle.
\end{aligned} \tag{D.23}$$

## 5. Schritt: Berechnung der reduzierten Matrixelemente der $p$ - und $q$ -Anteile

Die verbleibende Aufgabe besteht in der Berechnung der reduzierten Matrixelemente  $\langle p' L' || P^{(\gamma_p)}(c_{p+}, \rho, \varphi_p) || pL \rangle$  und  $\langle q' l' || Q^{(\gamma_q)}(c_q, \varphi_q, \varphi_q) || ql \rangle$ . Mit Hilfe des Wigner-Eckart-Theorems (A.2) und der Formel (D.19) können wir schreiben,

$$\begin{aligned}
& \langle p' L' || P^{(\gamma_p)}(c_{p+}, \rho, \varphi_p) || pL \rangle \\
&= \frac{(-)^{L'-M_L}}{\begin{pmatrix} L' & \gamma_p & L \\ -M_L & 0 & M_L \end{pmatrix}} \int d^2 \hat{p}' \int d^2 \hat{p} Y_{M_L}^{(L')*}(\hat{p}') Y_{M_L}^{(L)}(\hat{p}) \langle \vec{p}' | P_0^{(\gamma_p)}(c_{p+}, \rho, \varphi_p) | \vec{p} \rangle \\
&= \frac{(-)^{L'-M_L}}{\begin{pmatrix} L' & \gamma_p & L \\ -M_L & 0 & M_L \end{pmatrix}} \\
& \quad \int d^2 \hat{p}' \int d^2 \hat{p} Y_{M_L}^{(L')*}(\hat{p}') Y_{M_L}^{(L)}(\hat{p}) f_{p, \varphi_p}(k, p_-, p_+) \left\{ Y^{(c_{p+})}(\hat{p}_+) \otimes Y^{(\rho)}(\hat{p}_-) \right\}_0^{(\gamma_p)}.
\end{aligned} \tag{D.24}$$

Das Tensorprodukt aus Kugelfunktionen mit Argumenten  $\hat{p}_+$  und  $\hat{p}_-$  schreiben wir gemäß der Formel (A.32) um. Das dadurch erhaltene Winkelintegral kann dann mit Hilfe der Integrationsformel (A.31) berechnet werden,

$$\begin{aligned}
& \langle p' L' || P^{(\gamma_p)}(c_{p_+}, \rho, \varphi_p) || p L \rangle \\
&= \frac{(-)^{L'-M_L}}{\begin{pmatrix} L' & \gamma_p & L \\ -M_L & 0 & M_L \end{pmatrix}} \sum_{\delta_{p_1}=0}^{c_{p_+}} \sum_{\delta_{p_2}=0}^{\rho} \sum_{\alpha_{p_1} \alpha_{p_2}} RP(c_{p_+}, \rho, \gamma_p, \delta_{p_1}, \delta_{p_2}, \alpha_{p_1}, \alpha_{p_2}) \\
& \quad p'^{c_{p_+}+\rho-\delta_{p_1}-\delta_{p_2}} p^{\delta_{p_1}+\delta_{p_2}} \int d^2 \hat{p}' \int d^2 \hat{p} Y_{M_L}^{(L')*}(\hat{p}') Y_{M_L}^{(L)}(\hat{p}) \frac{f_{p, \varphi_p}(k, p_-, p_+)}{p_+^{c_{p_+}} p_-^{\rho}} \\
& \quad \left\{ Y^{(\alpha_{p_1})}(\hat{p}') \otimes Y^{(\alpha_{p_2})}(\hat{p}) \right\}_0^{(\gamma_p)} \\
&= \sum_{\delta_{p_1}=0}^{c_{p_+}} \sum_{\delta_{p_2}=0}^{\rho} \sum_{\alpha_{p_1} \alpha_{p_2}} RP(c_{p_+}, \rho, \gamma_p, \delta_{p_1}, \delta_{p_2}, \alpha_{p_1}, \alpha_{p_2}) p'^{c_{p_+}+\rho-\delta_{p_1}-\delta_{p_2}} p^{\delta_{p_1}+\delta_{p_2}} \\
& \quad \sum_{\rho_p} RF(L', L, \alpha_{p_1}, \alpha_{p_2}, \gamma_p; \rho_p) F_{p, \rho_p}(k, p, p'; c_{p_+}, \rho, \varphi_p), \tag{D.25}
\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
& F_{p, \rho_p}(k, p, p'; c_{p_+}, \rho, \varphi_p) \\
&= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 du_p P_{\rho_p}(u_p) \frac{1}{p_+^{c_{p_+}} p_-^{\rho}} f_{p, \varphi_p}(k, p_-, p_+) \\
&= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 du_p P_{\rho_p}(u_p) \frac{1}{p_+^{c_{p_+}} p_-^{\rho}} \left( \frac{1}{2} \int_{-1}^1 dv_p P_{\varphi_p}(v_p) f_p(k, p_-, p_+, v_p) \right) \tag{D.26}
\end{aligned}$$

und  $p_{\pm} = (p^2 + p'^2 \pm 2pp'u_p)^{\frac{1}{2}}$ . Schließlich können wir noch die Summationsstruktur wie folgt vereinfachen,

$$\begin{aligned}
& \langle p' L' || P^{(\gamma_p)}(c_{p_+}, \rho, \varphi_p) || p L \rangle \\
&= \sum_{\delta=0}^{c_{p_+}+\rho} \sum_{\rho_p} C(c_{p_+}, \rho, \gamma_p, L', L, \delta, \rho_p) p'^{c_{p_+}+\rho-\delta} p^{\delta} F_{p, \rho_p}(k, p, p'; c_{p_+}, \rho, \varphi_p), \tag{D.27}
\end{aligned}$$

in dem wir 3 Summationen in die geometrische Funktion

$$\begin{aligned}
& C(c_{p_+}, \rho, \gamma_p, L', L, \delta, \rho_p) \\
&= \sum_{\tilde{\delta}=\tilde{\delta}_{min}}^{\tilde{\delta}_{max}} \sum_{\alpha_{p_1} \alpha_{p_2}} RP(c_{p_+}, \rho, \gamma_p, \delta_{p_1} = \frac{1}{2}(\delta + \tilde{\delta}), \delta_{p_2} = \frac{1}{2}(\delta - \tilde{\delta}), \alpha_{p_1}, \alpha_{p_2}) \\
& \quad RF(L', L, \alpha_{p_1}, \alpha_{p_2}, \gamma_p; \rho_p) \tag{D.28}
\end{aligned}$$

hineindefinieren. Der Index  $\tilde{\delta}$  läuft in Zweierschritten von  $\tilde{\delta}_{min} = \text{Max}(-\delta, \delta - 2\rho)$  bis  $\tilde{\delta}_{max} = \text{Min}(\delta, 2c_{p_+} - \delta)$ . Die Umkopplungsfunktionen  $RP(\dots)$  und  $RF(\dots)$  sind im Anhang A angegeben.



Analog erhalten wir für den q-Anteil

$$\begin{aligned} & \langle q'l' || Q^{(\gamma_q)}(c_q, \varphi_q, \varphi_q) || ql \rangle \\ &= \sum_{\delta=0}^{c_q+\varphi_q} \sum_{\rho_q} C(c_q, \varphi_q, \gamma_q, l', l, \delta, \rho_q) q'^{c_q+\varphi_q-\delta} q^\delta F_{q,\rho_q}(k, q, q'; c_q, \varphi_q), \end{aligned} \quad (D.29)$$

mit

$$\begin{aligned} & F_{q,\rho_q}(k, q, q'; c_q, \varphi_q) \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 du_q P_{\rho_q}(u_q) \frac{1}{q_+^{c_q} q_-^{\varphi_q}} \left( \frac{1}{2} \int_{-1}^1 dv_q P_{\varphi_q}(v_q) f_q(k, q_-, q_+, v_q) \right) \end{aligned} \quad (D.30)$$

und  $q_\pm = (q^2 + q'^2 \pm 2qq'u_q)^{\frac{1}{2}}$ .

In den folgenden beiden Abschnitten spezialisieren wir die allgemeine Master-Formel (D.23) mit (D.27) und (D.29) durch Benutzung von (D.9) und (D.10) auf Ein- und Zweikörper-Ströme.

## D.2 Master-Formel für Einkörper-Ströme

### 1. Schritt: Berechnung von $\langle p'L' || P^{(\gamma_p)}(\dots) || pL \rangle$

Für Einkörper-Ströme ist die Funktion

$$f_p(k, p_-, p_+, v_p) p = \delta^{(3)}(\vec{p}_-) = \frac{\delta(p' - p)}{p^2} \delta^{(2)}(\hat{p}' - \hat{p}) \quad (D.31)$$

unabhängig vom Winkel  $v_p = \hat{k} \cdot \hat{p}_-$ . Die Berechnung der Entwicklungskoeffizienten (D.14) ergibt unter Ausnutzung der Orthogonalitätsrelation der Legendre-Polynome (A.16),

$$f_{p,\varphi_p}(k, p_-, p_+) = \frac{\delta(p' - p)}{p^2} \delta^{(2)}(\hat{p}' - \hat{p}) \delta_{\varphi_p 0}. \quad (D.32)$$

Bevor wir uns der  $u_p$ -Integration in (D.26) zuwenden, nutzen wir aus, daß für Einkörper-Ströme die Ränge  $c_{p+} = c_{p-} = c_p = 0$  sind und daß - wie soeben bewiesen wurde - auch  $\varphi_p = 0$  ist. Hierdurch lassen sich die geometrischen Funktionen und die Summationsstruktur in (D.23) erheblich vereinfachen,

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \varphi_p & \varphi_q & \kappa \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & \varphi_q & \kappa \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{(-)^{\kappa}}{\hat{\kappa}} \delta_{\varphi_q, \kappa}, \\ & \begin{Bmatrix} c_p & c_q & c \\ \varphi_p & \varphi_q & \kappa \\ \gamma_p & \gamma_q & \sigma \end{Bmatrix} \longrightarrow \begin{Bmatrix} 0 & c & c \\ 0 & \varphi_q & \kappa \\ \gamma_p & \gamma_q & \sigma \end{Bmatrix} = \frac{1}{\hat{c} \hat{\kappa} \hat{\sigma}} \delta_{\gamma_p, 0} \delta_{\varphi_q, \kappa} \delta_{\gamma_q, \sigma}, \\ & \begin{Bmatrix} L' & L & \gamma_p \\ l' & l & \gamma_q \\ \mathcal{L}' & \mathcal{L} & \sigma \end{Bmatrix} \longrightarrow \begin{Bmatrix} L & L & 0 \\ l' & l & \gamma_q \\ \mathcal{L}' & \mathcal{L} & \sigma \end{Bmatrix} = \frac{(-)^{\mathcal{L}'+L+l+\sigma}}{\hat{L} \hat{\sigma}} \begin{Bmatrix} l' & l & \sigma \\ \mathcal{L} & \mathcal{L}' & L \end{Bmatrix} \delta_{L', L} \delta_{\gamma_q, \sigma}. \end{aligned}$$

Hierbei wurden die Formeln (A.11), (A.12) und (A.13) benutzt. Desweiteren vereinfacht sich

$$RK(c_p, c_{p-}, c_{p+}, \gamma_p, \varphi_p; \rho) \longrightarrow RK(0, 0, 0, 0, 0; \rho) = \delta_{\rho, 0},$$

so daß in (D.23) die Summen über  $\gamma_p$ ,  $\varphi_p$ ,  $\gamma_q$ ,  $\varphi_q$  und  $\rho$  verschwinden. Wir erhalten als Zwischenresultat,

$$\begin{aligned} & \langle p'q'[(L'l')\mathcal{L}'(S's')\mathcal{S}']J'||T^{([Ia]j)}(1, k)_1||\Psi_B\rangle \\ &= (-i)^j (4\pi)^{\frac{3}{2}} \sum_{\nu=\{Ll\mathcal{L}Ss\mathcal{S}\}} \langle (S's')\mathcal{S}'||s_1^{(d)}(st)||(\mathcal{S}s)\mathcal{S}\rangle \\ & \sum_{\kappa} RK(a, b, e, j, I; \kappa) \sum_{\sigma} RS(c, d, e, j; \mathcal{L}', \mathcal{S}', J', \mathcal{L}, \mathcal{S}, \frac{1}{2}; \kappa, \sigma) \\ & (-)^{c+\mathcal{L}'+L+l+\kappa} \frac{\hat{\mathcal{L}}' \hat{\mathcal{L}}}{\hat{L}} \left\{ \begin{matrix} l' & l & \sigma \\ \mathcal{L} & \mathcal{L}' & L \end{matrix} \right\} \delta_{L', L} \\ & \int_0^\infty p^2 dp \langle p'L||P^{(0)}(0, 0, 0)||pL\rangle \int_0^\infty q^2 dq \langle q'l'||Q^{(\sigma)}(c, \kappa, \kappa)||ql\rangle \langle pq\nu|\Psi_B\rangle. \end{aligned} \quad (D.33)$$

Nun können wir den p-Anteil (D.27) vollständig berechnen,

$$\begin{aligned} \langle p'L||P^{(0)}(0, 0, 0)||pL\rangle &= \sum_{\rho_p} C(0, 0, 0, L, L, 0, \rho_p) F_{p, \rho_p}(k, p, p'; 0, 0, 0) \\ &= \sum_{\rho_p} \hat{L} \delta_{\rho_p, L} \frac{1}{2} \int_{-1}^1 du_p P_{\rho_p}(u_p) f_{p, 0}(k, p_-, p_+) \\ &= \hat{L} \frac{1}{2} \int_{-1}^1 du_p P_L(u_p) \frac{\delta(p' - p)}{p^2} \delta^{(2)}(\hat{p}' - \hat{p}) \\ &= \frac{1}{4\pi} \frac{\delta(p' - p)}{p^2} \hat{L} \end{aligned} \quad (D.34)$$

Im letzten Schritt haben wir die zweidimensionale  $\delta$ -Funktion gemäß (A.21) dargestellt und die Orthogonalitätsrelation (A.16) ausgenutzt.  $C(0, 0, 0, L, L, 0, \rho_p) = \hat{L} \delta_{\rho_p, L}$  wurde wiederum mittels (A.11), (A.12) und (A.13) bewiesen. Für (D.33) ergibt sich damit,

$$\begin{aligned} & \langle p'q'[(L'l')\mathcal{L}'(S's')\mathcal{S}']J'||T^{([Ia]j)}(1, k)_1||\Psi_B\rangle \\ &= (-i)^j (4\pi)^{\frac{1}{2}} \sum_{\nu=\{Ll\mathcal{L}Ss\mathcal{S}\}} \delta_{L', L} \langle (S's')\mathcal{S}'||s_1^{(d)}(st)||(\mathcal{S}s)\mathcal{S}\rangle \\ & \sum_{\kappa} RK(a, b, e, j, I; \kappa) \sum_{\sigma} RS(c, d, e, j; \mathcal{L}', \mathcal{S}', J', \mathcal{L}, \mathcal{S}, \frac{1}{2}; \kappa, \sigma) \\ & (-)^{c+\mathcal{L}'+L+l+\kappa} \hat{\mathcal{L}}' \hat{\mathcal{L}} \left\{ \begin{matrix} l' & l & \sigma \\ \mathcal{L} & \mathcal{L}' & L \end{matrix} \right\} \int_0^\infty q^2 dq \langle q'l'||Q^{(\sigma)}(c, \kappa, \kappa)||ql\rangle \langle p'q\nu|\Psi_B\rangle. \end{aligned} \quad (D.35)$$

## 2. Schritt: Berechnung von $\langle q'l' || Q^{(\gamma_q)}(\dots) || ql \rangle$

Um das reduzierte Matrixelement  $\langle q'l' || Q^{(\gamma_q)}(c_q, \varphi_q, \varphi_q) || ql \rangle$  zu berechnen, gehen wir von der Funktion

$$f_q(k, q_-, q_+, v_q) = \delta^{(3)}(\vec{q}_- - \Lambda \vec{k}) q_+^{pq} = \frac{\delta(q_- - |\Lambda|k)}{q_-^2} \delta^{(2)}(\hat{q}_- - \text{sign}\Lambda \hat{k}) q_+^{pq} \quad (\text{D.36})$$

aus, wobei wir den Parameter  $\Lambda$  zunächst noch nicht fixieren. Erst am Ende der Rechnung setzen wir  $\Lambda = -\frac{2}{3}$ , um das Resultat für Einkörper-Ströme zu spezifizieren. Durch die Wahl  $\Lambda = \frac{1}{3}$  erhalten wir anschließend das entsprechende Resultat für Zweikörper-Ströme. Zuerst führen wir die  $v_q$ -Integration in (D.30) aus. Hierbei gehen wir analog vor wie bei der  $u_p$ -Integration im vorangegangenen Schritt,

$$\begin{aligned} f_{q,\varphi_q}(k, q_-, q_+) &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 dv_q P_{\varphi_q}(v_q) f_q(k, q_-, q_+, v_q) \\ &= \frac{\delta(q_- - |\Lambda|k)}{q_-^2} q_+^{pq} \frac{1}{2} \int_{-1}^1 dv_q P_{\varphi_q}(v_q) \delta^{(2)}(\hat{q}_- - \text{sign}\Lambda \hat{k}) \\ &= \frac{1}{4\pi} (\text{sign}\Lambda)^{\varphi_q} \frac{\delta(q_- - |\Lambda|k)}{q_-^2} q_+^{pq}. \end{aligned} \quad (\text{D.37})$$

Die Phase  $(\text{sign}\Lambda)^{\varphi_q}$  wurde durch Anwenden der Relation  $P_l(-u) = (-)^l P_l(u)$  erzeugt. Nun wenden wir uns der  $u_q$ -Integration zu,

$$\begin{aligned} F_{q,\rho_q}(k, q, q'; c_q, \varphi_q) &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 du_q f_{q,\varphi_q}(k, q_-, q_+) \frac{P_{\rho_q}(u_q)}{q_+^{c_q} q_-^{\varphi_q}} \\ &= \frac{1}{4\pi} (\text{sign}\Lambda)^{\varphi_q} \frac{1}{2} \int_{-1}^1 du_q \delta(q_- - |\Lambda|k) \frac{P_{\rho_q}(u_q)}{q_+^{c_q - pq} q_-^{\varphi_q + 2}} \\ &= \frac{1}{4\pi} \frac{(\text{sign}\Lambda)^{\varphi_q}}{(|\Lambda|k)^{\varphi_q + 2}} \frac{1}{2} \int_{-1}^1 du_q \delta(q_- - |\Lambda|k) \frac{P_{\rho_q}(u_q)}{q_+^{c_q - pq}}. \end{aligned} \quad (\text{D.38})$$

Um das Integral berechnen zu können, schreiben wir die auftretende  $\delta$ -Funktion wie folgt um,

$$\begin{aligned} \delta(q_- - |\Lambda|k) &= 2|\Lambda|k \delta(q_-^2 - \Lambda^2 k^2) \\ &= 2|\Lambda|k \delta(2qq'u_q - [q^2 + q'^2 - \Lambda^2 k^2]) \\ &= \frac{|\Lambda|k}{qq'} \delta\left(u_q - \frac{q^2 + q'^2 - \Lambda^2 k^2}{2qq'}\right). \end{aligned} \quad (\text{D.39})$$

Damit erhalten wir

$$F_{q,\rho_q}(k, q, q'; c_q, \varphi_q) = \frac{1}{4\pi} \frac{(\text{sign}\Lambda)^{\varphi_q}}{2(|\Lambda|k)^{\varphi_q+1}} \frac{1}{qq'_+ q_+^{c_q-pwq}} P_{\rho_q}(\bar{u}_q) \quad (\text{D.40})$$

und

$$\begin{aligned} & \langle q'l' || Q^{(\gamma_q)}(c_q, \varphi_q, \varphi_q) || ql \rangle \\ &= \frac{1}{4\pi} \frac{(\text{sign}\Lambda)^{\varphi_q}}{2(|\Lambda|k)^{\varphi_q+1}} \sum_{\delta=0}^{c_q+\varphi_q} \sum_{\rho_q} C(c_q, \varphi_q, \gamma_q, l', l, \delta, \rho_q) \frac{q'^{c_q+\varphi_q-\delta-1} q^{\delta-1}}{q_+^{c_q-pwq}} P_{\rho_q}(\bar{u}_q) \end{aligned} \quad (\text{D.41})$$

mit  $\bar{u}_q = \frac{q^2+q'^2-\Lambda^2 k^2}{2qq'}$  und  $q_+ = (2(q^2 + q'^2) - \Lambda^2 k^2)^{\frac{1}{2}}$ . Wenn wir nun  $\Lambda = -\frac{2}{3}$  wählen und die Größe

$$\begin{aligned} & I_\Lambda(p', q', k; l', l, \nu; c_q, \varphi_q, \gamma_q; pwq) \\ &= 4\pi(\text{sign}\Lambda)^{\varphi_q} \int_0^\infty q^2 dq \langle q'l' || Q^{(\gamma_q)}(c_q, \varphi_q, \varphi_q) || ql \rangle \langle p'q\nu | \Psi_B \rangle \\ &= \frac{1}{(|\Lambda|k)^{\varphi_q}} \sum_{\delta=0}^{c_q+\varphi_q} \sum_{\rho_q} C(c_q, \varphi_q, \gamma_q; l', l; \delta, \rho_q) q'^{c_q+\varphi_q-\delta-1} \\ & \quad \frac{1}{2|\Lambda|k} \int_{|q'-|\Lambda|k|}^{q'+|\Lambda|k} dq \left[ q^{\delta+1} q_+^{pwq-c_q} P_{\rho_q}(\bar{u}_q) \langle p'q\nu | \Psi_B \rangle \right], \end{aligned} \quad (\text{D.42})$$

definieren, läßt sich (D.35) auf die Form

$$\begin{aligned} & \langle p'q' [(L'l')\mathcal{L}'(S's')\mathcal{S}'] J' || T^{([Ia]j)}(1, k)_1 || \Psi_B \rangle \\ &= (-i)^j \frac{1}{(4\pi)^{\frac{1}{2}}} \sum_{\nu=\{Ll\mathcal{L}Ss\mathcal{S}\}} \delta_{L',L} \langle (S's')\mathcal{S}' || s_1^{(d)}(st) || (Ss)\mathcal{S} \rangle \\ & \quad \sum_{\kappa} RK(a, b, e, j, I; \kappa) \sum_{\sigma} RS(c, d, e, j; \mathcal{L}', \mathcal{S}', J', \mathcal{L}, \mathcal{S}, \frac{1}{2}; \kappa, \sigma) \\ & \quad (-)^{c+\mathcal{L}'+L+l} \hat{\mathcal{L}}' \hat{\mathcal{L}} \begin{Bmatrix} l' & l & \sigma \\ \mathcal{L} & \mathcal{L}' & L \end{Bmatrix} I_{\Lambda=-\frac{2}{3}}(p', q', k; l', l, \nu; c, \kappa, \sigma; pwq). \end{aligned} \quad (\text{D.43})$$

bringen.

### 3. Schritt: Hinzufügen der externen Operatoranteile

Um die Master-Formel (4.43) zu erhalten, müssen wir nun nur noch die externen Operatoranteile  $k_0^{pwk_0}/(m^{pwm}m_\Delta^{pwm\Delta}) f_{ft}(k_\mu^2)$  und  $C_i k^{pwk_i}$  sowie den Isospin-Anteil  $t_1^{(f)}(it)$  zur Formel (D.43) hinzufügen,

$$\begin{aligned}
& \langle p'q'[(L'l')\mathcal{L}'(S's')\mathcal{S}']J'; (T't')\mathcal{T}' || T^{([Ia]j)}(1, k)_1 || \Psi_B \rangle \\
&= (-i)^j \frac{1}{(4\pi)^{\frac{1}{2}}} \frac{k_0^{pwk_0}}{m^{pwm}m_\Delta^{pwm\Delta}} f_{ft}(k_\mu^2) \sum_{\nu=\{LlLSsSTt\}} \delta_{L'L} \delta_{S'S} \delta_{T'T} \\
& \quad \langle (T't')\mathcal{T}' || t_1^{(f)}(it) || (Tt)\frac{1}{2} \rangle \sum_{i=1}^{nts} C_i k^{pwk_i} \langle (Ss')\mathcal{S}' || s_1^{(d_i)}(st_i) || (Ss)\mathcal{S} \rangle \\
& \quad \sum_{\kappa} RK(a, b_i, e_i, j, I; \kappa) \sum_{\sigma} RS(c_i, d_i, e_i, j; \mathcal{L}', \mathcal{S}', J', \mathcal{L}, \mathcal{S}, \frac{1}{2}; \kappa, \sigma) \\
& \quad (-)^{c_i+\mathcal{L}'+L+l} \hat{\mathcal{L}}' \hat{\mathcal{L}} \left\{ \begin{matrix} l' & l & \sigma \\ \mathcal{L} & \mathcal{L}' & L \end{matrix} \right\} I_{\Lambda=-\frac{2}{3}}(p', q', k; l', l, \nu; c_i, \kappa, \sigma; pwq_i).
\end{aligned} \tag{D.44}$$

Die Kronecker-Symbole  $\delta_{S'S}$  und  $\delta_{T'T}$  treten auf, da die Spin- und Isospinoperatoren nur auf Teilchen 1 wirken und die Quantenzahlen des Paares 23 somit erhalten bleiben.

## D.3 Master-Formel für Zweikörper-Ströme

### 1. Schritt: Berechnung von $\langle p' L' || P^{(\gamma_p)}(\dots) || p L \rangle$

Da für Zweikörper-Ströme die Funktion

$$f_p(k, p_-, p_+, v_p) = F_{B_1, B_2}^{iex}(k, p_-, v_p) p_+^{pwp_+} p_-^{pwp_-} \quad (D.45)$$

sehr allgemein ist, ergeben sich an dieser Stelle keine Vereinfachungen und die in (D.26) auftretenden Winkelintegrationen sind numerisch auszuführen,

$$\begin{aligned} & \langle p' L' || P^{(\gamma_p)}(c_{p_+}, \rho, \varphi_p; pwp_+, pwp_-; iex, B_1, B_2) || p L \rangle \\ &= \sum_{\delta=0}^{c_{p_+}+\rho} \sum_{\rho_p} C(c_{p_+}, \rho, \gamma_p, L', L, \delta, \rho_p) p'^{c_{p_+}+\rho-\delta} p^\delta \\ & \quad \frac{1}{2} \int_{-1}^1 du_p P_{\rho_p}(u_p) p_+^{pwp_+-c_{p_+}} p_-^{pwp_--\rho} \frac{1}{2} \int_{-1}^1 dv_p P_{\varphi_p}(v_p) F_{B_1, B_2}^{iex}(k, p_-, v_p) \end{aligned} \quad (D.46)$$

mit  $p_\pm = (p^2 + p'^2 \pm 2pp'u_p)^{\frac{1}{2}}$ .

### 2. Schritt: Berechnung von $\langle q' l' || Q^{(\gamma_q)}(\dots) || q l \rangle$

Für Zweikörper-Ströme hat die Funktion  $f_q(k, q_-, q_+, v_q) = \delta^{(3)}(\vec{q}_- - \frac{1}{3}\vec{k}) q_+^{p w q}$  dieselbe Struktur wie die entsprechende Funktion für Einkörper-Ströme. Um  $\langle q' l' || Q^{(\gamma_q)}(\dots) || q l \rangle$  für Zweikörper-Ströme zu erhalten, müssen wir in (D.41) lediglich  $\Lambda = \frac{1}{3}$  wählen. Setzen wir dieses Resultat dann in (D.23) ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned} & \langle p' q' [(L' l') \mathcal{L}'(S' s') \mathcal{S}'] J' || T^{([Ia]j)}(2, k)_{23} || \Psi_B \rangle \\ &= (-i)^j (4\pi)^{\frac{1}{2}} \sum_{\nu=\{Ll\mathcal{L}Ss\mathcal{S}\}} \langle (S' s') \mathcal{S}' || S_{23}^{(d)}(st) || (Ss) \mathcal{S} \rangle \\ & \quad \sum_{\kappa} RK(a, b, e, j, I; \kappa) \sum_{\sigma} RS(c, d, e, j; \mathcal{L}', \mathcal{S}', J', \mathcal{L}, \mathcal{S}, \frac{1}{2}; \kappa, \sigma) \\ & \quad \sum_{\gamma_p \varphi_p \gamma_q \varphi_q} (-)^{c+\sigma} \hat{\gamma}_p \hat{\varphi}_p \hat{\gamma}_q \hat{\varphi}_q \hat{c} \hat{\kappa} \hat{\sigma} \hat{\mathcal{L}}' \hat{\mathcal{L}} \begin{pmatrix} \varphi_p & \varphi_q & \kappa \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ & \quad \left\{ \begin{matrix} c_p & c_q & c \\ \varphi_p & \varphi_q & \kappa \\ \gamma_p & \gamma_q & \sigma \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} L' & L & \gamma_p \\ l' & l & \gamma_q \\ \mathcal{L}' & \mathcal{L} & \sigma \end{matrix} \right\} \sum_{\rho} RK(c_p, c_{p_-}, c_{p_+}, \gamma_p, \varphi_p; \rho) \\ & \quad \int_0^\infty p^2 dp \left[ \langle p' L' || P^{(\gamma_p)}(c_{p_+}, \rho, \varphi_p; pwp_+, pwp_-; iex, B_1, B_2) || p L \rangle \right. \\ & \quad \left. I_{\Lambda=\frac{1}{3}}(p, q', k; l', l, \nu; c_q, \varphi_q, \gamma_q; p w q) \right]. \end{aligned} \quad (D.47)$$

wobei  $I_\Lambda(\dots)$  in (D.42) definiert ist.

### 3. Schritt: Hinzufügen der externen Operatoranteile

Um die Master-Formel (4.44) zu erhalten, müssen wir nun nur noch die externen Operatoranteile  $k_0^{pwk_0}/(m^{pwm}m_\Delta^{pwm\Delta}) f_{ft}(k_\mu^2)$  und  $C_i k^{pwk_i}$  sowie den Isospin-Anteil  $T_{23}^{(f)}(it)$  zur Formel (D.47) hinzufügen,

$$\begin{aligned}
& \langle p'q'[(L'l')\mathcal{L}'(S's')\mathcal{S}']J'; (T't')\mathcal{T}' || T^{([Ia]j)}(2, k)_{23} || \Psi_B \rangle \\
&= (-i)^j (4\pi)^{\frac{1}{2}} \frac{k_0^{pwk_0}}{m^{pwm}m_\Delta^{pwm\Delta}} f_{ft}(k_\mu^2) \sum_{\nu=\{Ll\mathcal{L}SsSTt\}} \delta_{s's} \delta_{t't} \\
& \langle (T't)\mathcal{T}' || T_{23}^{(f)}(it) || (Tt)\frac{1}{2} \rangle \sum_{i=1}^{nts} C_i k^{pwk_i} \langle (S's)\mathcal{S}' || S_{23}^{(d_i)}(st_i) || (Ss)\mathcal{S} \rangle \\
& \sum_{\kappa} RK(a, b_i, e_i, j, I; \kappa) \sum_{\sigma} RS(c_i, d_i, e_i, j; \mathcal{L}', \mathcal{S}', J', \mathcal{L}, \mathcal{S}, \frac{1}{2}; \kappa, \sigma) \\
& \sum_{\gamma_p \varphi_p \gamma_q \varphi_q} (-)^{c_i+\sigma} \hat{\gamma}_p \hat{\varphi}_p \hat{\gamma}_q \hat{\varphi}_q \hat{c}_i \hat{\kappa} \hat{\sigma} \hat{\mathcal{L}}' \hat{\mathcal{L}} \begin{pmatrix} \varphi_p & \varphi_q & \kappa \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
& \left\{ \begin{matrix} c_{p_i} & c_{q_i} & c_i \\ \varphi_p & \varphi_q & \kappa \\ \gamma_p & \gamma_q & \sigma \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} L' & L & \gamma_p \\ l' & l & \gamma_q \\ \mathcal{L}' & \mathcal{L} & \sigma \end{matrix} \right\} \sum_{\rho} RK(c_{p_i}, c_{p_{-i}}, c_{p_{+i}}, \gamma_p, \varphi_p; \rho) \\
& \int_0^\infty p^2 dp \left[ \langle p'L' || P^{(\gamma_p)}(c_{p_{+i}}, \rho, \varphi_p; pwp_{+i}, pwp_{-i}; iex, B_1, B_2) || pL \rangle \right. \\
& \left. I_{\Lambda=\frac{1}{3}}(p, q', k; l', l, \nu; c_{q_i}, \varphi_q, \gamma_q; p w q_i) \right]. \tag{D.48}
\end{aligned}$$

Die Kronecker-Symbole  $\delta_{s's}$  und  $\delta_{t't}$  treten auf, da die Spin- und Isospinoperatoren nur auf das Paar 23 wirken und die Quantenzahlen von Teilchen 1 somit erhalten bleiben.





# Literaturverzeichnis

- [1] P. Ackerbauer, D.V. Balin, V.M. Baturin, G.A. Beer, W.H. Breunlich, T. Case, K. Crowe, H. Daniel, J. Deutsch, J. Govaerts, Yu.S. Grigoriev, F.J. Hartmann, P. Kammel, R. King, B. Lauss, E.M. Maev, V.E. Marushin, J. Marton, M. Mühlbauer, C. Petitjean, Th. Petitjean, G.E. Petrov, R. Priels, W. Prymas, W. Schott, G.G. Semenchuk, Yu.V. Smirenin, A.A. Vorobyov, N.I. Voropaev und P. Wojciechowski, Phys. Lett. **B417**, 224 (1998).
- [2] J. Adam Jr. and E. Truhlík, Czech. J. Phys. **B34**, 1157 (1984).
- [3] J. Adam Jr., Ph.D. Thesis, Institute of Nuclear Physics, Řež, (1988) unveröffentlicht.
- [4] J. Adam Jr., E. Truhlík und D. Adamová, Nucl. Phys. **A492**, 556 (1989).
- [5] J. Adam Jr., Ch. Hajduk, H. Henning, P.U. Sauer and E. Truhlík, Nucl. Phys. **A531**, 623 (1991).
- [6] J. Adam Jr., H. Göller und H. Arenhövel, Phys. Rev. **C48**, 370 (1993).
- [7] J. Adam Jr. und H. Arenhövel, Nucl. Phys. **A614**, 289 (1997).
- [8] G. Bardin et al., Nucl. Phys. **A352**, 365 (1981).
- [9] G. Bardin et al., Nucl. Phys. **A453**, 591 (1986).
- [10] J.D. Bjorken und S.D. Drell, Relativistic Quantum Mechanics, (McGraw-Hill, New York, 1964).
- [11] S. Blatnik und N. Zovko, Acta Phys. Austriaca **39**, 62 (1974).
- [12] J. Carlson, D.O. Riska, R. Schiavilla und R.B. Wiringa, Phys. Rev. **C44**, 619 (1991).
- [13] J.G. Congleton und H.W. Fearing, Nucl. Phys. **A552**, 534 (1993).
- [14] J.G. Congleton und E. Truhlík, Phys. Rev. **C53**, 956 (1996).

- [15] L.D. Faddeev, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **39**, 1459 (1960) [Sov. Phys. JETP **12**, 1014 (1961)].
- [16] R.P. Feynman und M. Gell-Mann, Phys. Rev. **139**, 193 (1958).
- [17] M. Gell-Mann und M. Levy, Nuovo Cimento **15**, 53 (1960).
- [18] H. Göller und H. Arenhövel, Few-Body Systems **13**, 117 (1992).
- [19] O. Häusser, Few-Body Systems **Suppl. 9**, 69 (1996).
- [20] Ch. Hajduk, P.U. Sauer und W. Strueve, Nucl. Phys. **A405**, 581 (1983).
- [21] Ch. Hajduk, P.U. Sauer und S.N. Yang, Nucl. Phys. **A405**, 605 (1983).
- [22] H. Henning, P.U. Sauer und W. Theis, Nucl. Phys. **A537**, 367 (1992).
- [23] H. Henning, Universität Hannover, Private Kommunikation (1998).
- [24] H. Henning, Dissertation, Institut für Theoretische Physik, Universität Hannover (1999), unveröffentlicht.
- [25] E. Ivanov und E. Truhlík, Nucl. Phys. **A316**, 437 (1979).
- [26] M. Lacombe, B. Loiseau, J.M. Richard, R.J. Vinh Mau, J. Coté, P. Pirès und R. de Tourreil, Phys. Rev. **C21**, 861 (1980).
- [27] A. Lindner, Drehimpulse in der Quantenmechanik, (Teubner Studienbücher, 1984).
- [28] R. Machleidt, K. Holinde und C. Elster, Phys. Reports **149**, 1 (1987).
- [29] R. Machleidt, Adv. Nucl. Phys. **19**, 189 (1989).
- [30] L.E. Marcucci, D.O. Riska und R. Schiavilla, Phys. Rev. **C58**, 3069 (1998).
- [31] P. Mergell, U.G. Meissner und D. Drechsel, Nucl. Phys. **A596**, 367 (1996).
- [32] N.F. Mott, Phys. Roy. Soc. (London) **A124**, 425 (1929).
- [33] S. Nemoto, K. Chmielewski, N.W. Schellingerhout, J. Haidenbauer, S. Oryu und P.U. Sauer, Few-Body Systems **24**, 213 (1998).
- [34] S. Nemoto, K. Chmielewski, U. Meyer, J. Haidenbauer, S. Oryu und P.U. Sauer, Few-Body Systems **24**, 241 (1998).
- [35] M. Oelsner, J. Adam Jr. and P.U. Sauer,  
*Muon Capture on  $^3\text{He}$  : The Elastic Reaction*, Proceedings of the 7th Conference Mesons & Light Nuclei 98, Prague-Pruhonic, (World Scientific, 1999).

- [36] M. Oelsner, *Observable Concept for Electroweak Two-Body Breakup Reactions on the Three-Nucleon Bound State*, Internal Report, Universität Hannover (1998).
- [37] G. Peterson und I. Nakagawa, MIT Bates, Private Kommunikation (1998).
- [38] A.C. Phillips, F. Roig und J. Ros, Nucl. Phys. **A237**, 493 (1975).
- [39] M.N. Rosenbluth, Phys. Rev. **79**, 615 (1950).
- [40] P.U. Sauer und H. Henning, Few-Body Systems Supplement **7**, 92 (1994).
- [41] I. Sick, Nucl. Phys. **A579**, 596 (1994).
- [42] A.J.F. Siegert, Phys. Rev. **52**, 787 (1937).
- [43] A. Stadler und P. U. Sauer, Phys. Rev. **C46**, 64 (1992).
- [44] A. Stadler, University of Évora, Portugal, Private Kommunikation (1999).
- [45] W. Strueve, Ch. Hajduk, P.U. Sauer und W. Theis, Nucl. Phys. **A465**, 651 (1987).
- [46] D.R. Tilley, H.R. Weller und H.H. Hassan, Nucl. Phys. **A474**, 1 (1987).



## Danksagung

Für die Vergabe und Betreuung dieser Arbeit danke ich Herrn Prof. P.U.Sauer.

Besonderer Dank gebührt Jiří Adam aus Řež bei Prag. Die Zusammenarbeit mit ihm war von wesentlicher Bedeutung für den Fortschritt dieser Arbeit.

Hartmut Henning möchte ich danken, daß er mich in der Anfangsphase dieser Arbeit geduldig in den Tensoroperatorformalismus eingeführt hat und auch in der folgenden Zeit stets für wichtige Diskussionen zur Verfügung stand.

Karsten Chmielewski danke ich für seine ständige Bereitschaft, mir vor allem bei Computerproblemen behilflich zu sein.

Thomas Wilbois und Luping Yuan möchte ich für die Zusammenarbeit an elektromagnetischen Aufbruchreaktionen am gebundenen Dreinukleonen-System danken, die leider keinen Eingang mehr in diese Arbeit gefunden hat.

Ich danke Jaroslav Smejkal und Aleš Cieply für die große Gastfreundschaft, die mir von ihnen während meiner zahlreichen Aufenthalte in der Tschechischen Republik entgegengebracht wurde.

Kyrill Bugaev, Rik Naus, Shino Nemoto und Pacheco de Melo danke ich für die vielen gemeinsamen Unternehmungen auch außerhalb der Physik.

Schließlich möchte ich auch meiner Frau Claudia und meiner Tochter Marcela ein großes Dankeschön aussprechen für ihre Geduld und Unterstützung insbesondere in der Endphase dieser Arbeit.

## **Selbständigkeitserklärung**

Hiermit erkläre ich an Eides statt, daß ich die vorliegende Dissertation ohne andere als die angegebenen Hilfsmittel angefertigt und sie nicht schon als Diplomarbeit oder ähnliche Prüfungsarbeit eingereicht habe.

## Curriculum Vitae

02.09.1967	geboren in Salzgitter-Lebenstedt
1974 - 1978	Besuch der Paul-Gerhard-Grundschule in Cloppenburg
1978 - 1980	Besuch der Orientierungsstufe in Cloppenburg
1980 - 1987	Besuch des Clemens-August-Gymnasiums in Cloppenburg
Mai 1987	Abiturprüfung bestanden
1987 - 1988	Grundwehrdienst in Oldenburg
1988 - 1991	Physikstudium an der Technischen Universität Braunschweig
1991 - 1994	Physikstudium an der Universität Hannover
Dezember 1994	Diplomprüfung bestanden
April - Oktober 1995	Forschungsaufenthalt am Institut für Kernphysik in Řež bei Prag, Tschechische Republik
seit November 1995	Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Theoretische Physik an der Universität Hannover
März 1996	Heirat mit Claudia Rusch
Februar 1997	Geburt meiner Tochter Marcela Oelsner
Oktober 1997	Forschungsaufenthalt am Thomas Jefferson Lab, Virginia, USA